

УДК 532.528

АНАЛІЗ ОСНОВНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ КАВІТАЦІЇ

Анісімов В.В., к.т.н.,

Єрмаков П.П., д.т.н.

ДВНЗ «Український державний хіміко-технологічний університет»

Тел. (066) 632-06-70

Анотація – виконано порівняльний аналіз найбільш відомих математичних моделей кавітації. Виділено обмеження та припущення, які стосуються кожної моделі, а також їх переваги. Описано моделі: Релея, Релея-Плессета, Нолтінга-Нейпараса, Джилмора та ін. Окрему увагу приділено кінцево-елементному моделюванню кавітації на прикладі однорідної рівноважної моделі.

Ключові слова – математична модель кавітації, рівняння Релея-Плессета, рівняння Нолтінга-Нейпараса, однорідна рівноважна модель кавітації.

Постановка проблеми. На даний момент існує багато математичних моделей, що описують кавітацію в рідині. Більшість з них описує поведінку поодинокі сферичної бульбашки, зокрема зміну її розмірів під дією зниженого тиску. Ці моделі базуються на теорії пульсацій поодинокі сферичної бульбашки [1].

Припущення, що накладаються теорією пульсацій поодинокі сферичної бульбашки:

- 1) бульбашка розташована так далеко від інших бульбашок, що взаємодією між ними можна знехтувати;
- 2) бульбашка розташована так далеко від наявних в рідині мікрочасток, що взаємодією між ними можна знехтувати;
- 3) бульбашка розташована так далеко від стінок ємності, що взаємодією між ними можна знехтувати;
- 4) бульбашка розташована так далеко від поверхні розділу фаз, що взаємодією між ними можна знехтувати;
- 5) форма бульбашки є сферичною;
- 6) теплообміном на границі фаз при схлопуванні можна знехтувати.

Аналіз останніх досліджень. Основні математичні моделі кавітації.

Вперше математичне описання процесу стискання кавітаційної бульбашки отримано Релеєм. Ця модель описує стискання вакуумної, тобто пустої бульбашки. При цьому модель враховує тільки інерціальні сили і нехтує в'язкістю, поверхневим натягом та тиском парогазової суміші в бульбашці (розглядається стискання пустої бульбашки).

Нижче наведено загальний вигляд рівняння Релея

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -\frac{P_0}{\rho}, \quad (1)$$

де R – функція радіуса бульбашки від часу t ; P_0 – статичний тиск в рідині; ρ – густина рідини.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Навідміну від інших математичних моделей, рівняння Релея має загальний розв'язок. Але при цьому воно нехтує важливими параметрами, такими як тиск газу та пари в бульбашці, зовнішнім змінним тиском та ін. Тому рівняння Релея має вузьку область застосування і фактично застосовується тільки як основа для більш складних моделей та для визначення часу схлопування бульбашки за допомогою безпосереднього розв'язання цього рівняння.

Фактично модифікацією рівняння Релея є рівняння Релея-Плессета

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho} \left(P_g - P_0 - P(t) - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu\dot{R}}{R} \right), \quad (2)$$

де P_g – тиск парогазової суміші в бульбашці;

P_0 – статичний тиск в рідині; $P(t)$ – зовнішній змінний тиск;

μ – коефіцієнт динамічної в'язкості рідини;

σ – коефіцієнт поверхневого натягу рідини.

Рівняння Релея-Плессета (2) дозволяє додатково врахувати тиск газової суміші в бульбашці, змінний зовнішній тиск, в'язкість та поверхневий натяг рідини.

Незважаючи на те, що рівняння Релея-Плессета не має загального розв'язку, його чисельний розв'язок не являє собою значної проблеми. Для цього необхідно визначити граничні умови та значення тиску парогазової суміші та функції зовнішнього змінного тиску від часу.

Тиск парогазової суміші в бульбашці складається з тисків газів та пари. Тиск пари, як правило приймають постійним та рівним тиску насиченої пари при даній температурі. Тиск газової суміші залежить від виду термодинамічного процесу, який в свою чергу приймається в кожній конкретній моделі бульбашки. Як правило, процес стискання бульбашки вважається адіабатичним, що гарно корелюється з результатами експериментальних досліджень (рис. 1).

В вищеописаному випадку тиск парогазової суміші визначається за формулою

$$P_g = P_s + \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma}, \quad (3)$$

де P_s – тиск пари в бульбашці;
 γ – показник адіабати.

Основна частина. Зовнішній змінний тиск може бути функцією від часу будь-якого виду. Для акустичної кавітації це буде періодична функція, наприклад синусоїда. Для гідродинамічної кавітації вигляд функції зовнішнього змінного тиску визначається умовами руху рідини. При однократних ударних навантаженнях фронт та спад ударного імпульсу описується експоненціальними функціями.

Рівняння Релея-Плессета є порівняно простим, але в той же час воно досить точно описує процес росту та схлопування бульбашки. Це підтверджується дослідженнями розсіювання світла від кавітаційної бульбашки.

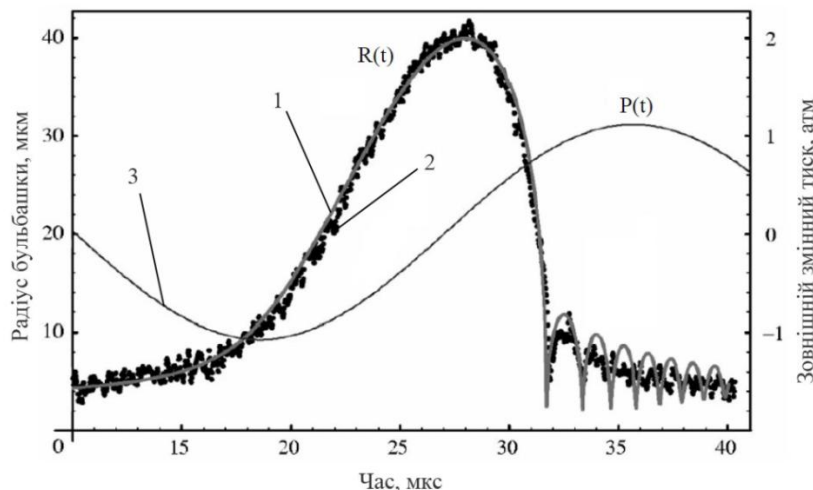


Рис. 1. Порівняння розрахунку пульсації парогазової бульбашки за допомогою рівняння Релея-Плессета та експериментальних даних:

- 1 – за рівнянням Релея-Плессета;
- 2 – за експериментальними даними;
- 3 – графік зовнішньої змінної сили

Як видно з графіків на рис. 1, результати розрахунку за рівнянням Релея-Плессета практично співпадають з експериментальними даними. Виключенням є проміжок часу після закінчення першого періоду стискання. Цей недолік не є принциповим, оскільки значний фізичний інтерес представляють тільки процеси під час першого періоду стискання.

Також часто використовується для розрахунків рівняння Нолтінга-Нейпараса [2], призначене для описання пульсації та схлопування кавітаційної бульбашки в акустичному полі

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{1}{\rho} \left[P_0 + P_{\max} \sin \omega t + \frac{2\sigma}{R} - P_s - \left(P_g + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \right] = 0, \quad (4)$$

де P_{\max} – амплітуда зовнішньої змінної сили;
 ω – кутова частота зовнішньої змінної сили.

Рівняння Нолтінга-Нейпараса призначене тільки для моделювання акустичної кавітації та кавітаційних процесів, що зводяться до циклічних. Це виражено тим, що в самому рівнянні вже закладено дію змінної зовнішньої сили у вигляді $P_{\max} \sin(\omega t)$. Проте необхідно відмітити, що при заміні цього виразу на функцію $P(t)$ в загальному вигляді можна застосовувати рівняння Нолтінга-Нейпараса для будь-якого виду кавітації. Те саме стосується і багатьох інших математичних моделей кавітації.

Рівняння Нолтінга-Нейпараса не враховує стискуваність рідини, тому погано описує процес стискання бульбашки на кінцевих стадіях.

Існують більш складні моделі, що описують процес кавітації. В рівнянні Херінга-Фліна додатково враховано стискуваність та в'язкість рідини

$$R\ddot{R} \left(1 + \frac{2\dot{R}}{c_0} \right) + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \left(1 - \frac{4}{3} \frac{\dot{R}}{c_0} \right) + \frac{R\dot{R}}{\rho \cdot c_0} \left(1 - \frac{\dot{R}}{c_0} \right) \frac{dP(r,t)}{dr} + \frac{1}{\rho} \left(P_0 - P_{\max} \sin \omega t + \frac{2\sigma}{R} + \frac{4\mu\dot{R}}{R} - P_s - \left(P_g + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \right) = 0, \quad (5)$$

де c_0 – швидкість звуку в рідині.

Рівняння Херінга-Фліна добре описує процес стискання бульбашки тільки при швидкостях руху стінки значно менше швидкості звуку c_0 . При наближенні швидкості руху стінки бульбашки до швид-

кості звуку рівняння Херінга-Фліна дає лише якісну оцінку цього процесу. Як і рівняння Нолтінга-Нейпараса, рівняння Херінга-Фліна призначено для моделювання процесів акустичної кавітації.

Недоліки рівняння Херінга-Фліна, пов'язані з швидкістю руху стінки бульбашки, враховані у методі Кірквуда-Бете та відповідно у рівнянні Кірквуда-Бете

$$R\ddot{R}\left(1-\frac{\dot{R}}{c_0}\right)+\frac{3}{2}\dot{R}^2\left(1-\frac{\dot{R}}{3c_0}\right)-\frac{R\dot{R}}{c_0}\frac{H}{dR}\left(1-\frac{\dot{R}}{c_0}\right)-H\left(1+\frac{\dot{R}}{c_0}\right)=0, \quad (6)$$

де H – вільна ентальпія на поверхні бульбашки.

В рівнянні Кірквуда-Бете входить вільна ентальпія на поверхні бульбашки, яка визначається за формулою

$$H = \int_{P_0}^{P(r,t)} \frac{dp}{\rho}. \quad (7)$$

При малих швидкостях переміщення стінки бульбашки, коли $\dot{R} \ll c_0$ або $c_0 \rightarrow \infty$ (випадок нестискуваної рідини) рівняння (6) зводиться до рівняння Релея.

Таким чином, існує декілька математичних моделей кавітаційної бульбашки. Незважаючи на значну різницю в складності, загальному вигляді та врахованих факторах, всі моделі мають спільну частину, виражену функцією радіусів (спільне математичне походження). Інакше кажучи, будь-яке вищеописане рівняння, що описує стискання кавітаційної бульбашки, можна представити у вигляді

$$R\ddot{R} \cdot a + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \cdot b = \frac{1}{\rho} \sum_i P_i, \quad (8)$$

де a, b – коефіцієнти, що залежать від області призначення та способу отримання рівняння.

В рівнянні (8) ліва частина представляє собою кінематичні параметри руху стінки кавітаційної бульбашки, а права частина представляє собою суму всіх врахованих в моделі факторів, виражених в одиницях вимірювання тиску, віднесених до густини рідини. Саме з виразу (8) видно важливість рівняння Релея для моделювання кавітаційних процесів.

Існує багато ускладнених моделей, які базуються на рівняннях Релея-Плессета, Нолтінга-Нейпараса, Кірквуда-Бете. Проте ускладнення математичної моделі не завжди сприяє її точності. Це пов'язано зі

збільшенням кількості припущень та напівемпіричних залежностей, які не завжди достатньо точно описують процеси стискання кавітаційної бульбашки або мають дуже вузьку область застосування.

Врахування додаткових факторів при моделюванні процесів кавітації. Рівняння Релея-Плессета, Нолтінга-Нейпараса, Херінга-Фліна, Кірквуда-Бете можна назвати класичними, ґрунтуючись на широті їх застосування. Проте вони не при всіх умовах якісно описують поведінку кавітаційної бульбашки. Тому актуальною проблемою стало врахування додаткових факторів при побудові моделі.

Одним з найважливіших таких факторів є теплообмін з оточуючим середовищем.

Динаміка парогазової порожнини з врахуванням теплообміну і, частково, динаміки газу в бульбашці розроблена в роботах Р. І. Нігмагуліна та М. А. Маргуліса [2,3,4].

Для описання руху стінки бульбашки застосовано рівняння Релея. Швидкість газу в бульбашці визначалась з рівняння нерозривності. Маса газу в бульбашці вважалась незмінною. Тоді тиск в бульбашці визначається з формули [2]

$$P(t) = \frac{R_{\max}^3 P_0}{3T_0} \left(\int_0^{R_{\max}} \frac{R^2}{T(R, t)} dR \right)^{-1}, \quad (9)$$

де $P(t)$ – тиск газу в бульбашці;

T_0 – температура в початковий момент часу;

$T(R, t)$ – функція температури;

R і R_{\max} – поточний і максимальний радіуси бульбашки.

Нижче представлено рівняння теплопровідності для газу всередині кавітаційної бульбашки [2]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho_{\bar{a}} c_p} \operatorname{div}(\lambda_{\bar{a}} \operatorname{grad} T) - \bar{V}_{\bar{a}} \operatorname{grad} T + \frac{1}{\rho_{\bar{a}} c_p} \frac{dP}{dt}, \quad (10)$$

де $\rho_{\bar{a}}$ – густина газу;

c_p – теплоємність газу при постійному тиску;

$\lambda_{\bar{a}}$ – коефіцієнт теплопровідності газу;

T – температура;

$V_{\bar{a}}$ – швидкість газу в бульбашці та P – тиск в бульбашці.

При цьому зміна коефіцієнта температуропровідності враховувалася за допомогою наступного співвідношення [2]

$$\rho_a c_p = \frac{P(t)}{T(R, t)} \frac{\gamma}{\gamma - 1}. \quad (11)$$

За результатами чисельного розв'язання рівняння (9) разом з рівнянням Релея зроблено висновок, що теплообмін в процесі схлопування бульбашки є досить важливим фактором. Врахування теплообміну значно знижує максимальні параметри парогазової суміші в середині кавітаційної бульбашки: температуру – більше ніж в 2 рази, тиск – більше ніж на порядок в порівнянні з адіабатичним схлопуванням. Час схлопування з врахуванням теплообміну мало відрізняється від часу адіабатичного схлопування та від часу релеєвського схлопування пустої бульбашки.

Іншим важливим фактором є взаємодія кавітаційних бульбашок. В більшості випадків, особливо це стосується теоретичних досліджень, розглядають поведінку поодинокі кавітаційної бульбашки. В реальних умовах досить важко отримати таку бульбашку. Крім того, на практиці застосовують саме багатобульбашкову кавітацію. Причиною виникнення саме багатобульбашкової кавітації в тому, що в об'ємі, до якого прикладається змінний тиск, вже існує багато кавітаційних зародків та мікронеоднорідностей. Навіть при прикладенні тиску, який лише трохи перевищує порог кавітації, в рідині одразу ж утворюється певна кількість кавітаційних бульбашок, що займають певну частину простору, яку називають кавітаційною областю [5] або зоною. При виникненні розтягуючих напружень в рідині всі зародки кавітації починають зростати майже одночасно, утворюючи кавітаційний кластер. Якщо всі зародки досягають максимального розміру одночасно, то середовище може вважатися практично монодисперсним, тобто такою, що складається з бульбашок одного розміру [6].

Якщо відстань між кавітаційними бульбашками в кластері мала, то бульбашки взаємодіють одна з одною під час їх пульсацій. В такому випадку є необхідність врахування взаємодії кавітаційних бульбашок. Як правило, для цього в рівняння динаміки кавітаційної бульбашки додається складова, що виражає тиск, який генерується сусідніми кавітаційними бульбашками. Наприклад, рівняння Релея-Плессета при цьому отримує наступний вигляд [6]

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{1}{\rho} \left[P_\infty - P_i - P_a + P_{\text{ëää}} + \frac{2\sigma}{R} + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \left(P_\infty + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \right] = 0, \quad (12)$$

де $P_{\text{кав}}$ – тиск, створений сусідніми кавітаційними бульбашками.

Як вже зазначалося, не завжди ускладнення математичної моделі призводить до уточнення отриманого розв'язку. Позбуваючись од-

ного тільки спрощення про те, що кавітаційна бульбашка не взаємодіє з іншими, необхідно вводити спрощення про те, що:

- 1) Всі бульбашки мають однаковий розмір;
- 2) Зовнішні умови однакові для всіх бульбашок.

Як наслідок цих умов:

- 1) Всі бульбашки кластера схлопуються одночасно;
- 2) Всі бульбашки генерують однакові хвилі тиску.

В реальному досліді досягти виконання цих умов значно важче, ніж виділити одну пульсуючу бульбашку.

Крім того, для моделювання кавітаційного кластера необхідно розв'язати систему рівнянь виду (12), з кількістю рівнянь рівній кількості бульбашок в кластері. Ця задача є складною навіть з чисто технічної точки зору.

Математичні моделі ударної хвилі при схлопуванні. Всі вищеописані математичні моделі призначені для опису руху стінки кавітаційної бульбашки. Проте окремий інтерес представляє собою силова сторона процесу схлопування. При схлопуванні кавітаційної бульбашки в середовище випромінюється сферична хвиля. Рівняння цієї хвилі носить назву рівняння Джилмора і має наступний вигляд [7]

$$P(r,t) = \frac{P(r,t) - P_0}{P_0 - P_g} = \frac{R}{3r} \left[\frac{R_0^3}{R^3} - 4 \right] - \frac{R^4}{3r^4} \left[\frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right], \quad (13)$$

де $P(r,t)$ – функція поля безрозмірного тиску;

r – відстань до центру бульбашки.

При великій швидкості схлопування кавітаційної бульбашки вищеописана хвиля може перейти в ударну.

Метод кінцевих елементів при моделюванні кавітації. В останній час отримали розвиток методи кінцево-елементного моделювання, які застосовують для опису самих різноманітних процесів, в тому числі і гідродинамічних. Яскравим прикладом даного виду моделей є однорідна рівноважна модель кавітації [8].

В рамках даної моделі рідина вважається однорідною газорідинною сумішшю з постійними в об'ємі параметрами та з газовою фазою, що містить водяну пару та розчинений газ. Кількість водяної пари по відношенню до кількості газу обумовлено місцевими рівноважними термодинамічними умовами. При розрахунках масова доля несконденсованого газу у відповідності до [8] дорівнює 10^{-5} . Це типове значення при нормальних умовах для більшості розрахункових випад-

ків.

Однорідна рівноважна кавітаційна модель не описує структури кавітаційної області, руху окремих парогазових бульбашок. Швидкості та температури парогазової та рідинної фаз вважаються однаковими. Основні рівняння моделі описані в [8]. Зупинимось лише на рівняннях, які безпосередньо описують кавітацію.

Густина парогазової суміші розраховується за формулою[8]

$$V = y_g \frac{R_{univ} T}{P \mu_g} + (1 - y_g - y_v) V_1(T, P) + y_v \frac{R_{univ} T z_v(T, P)}{P \mu_v}, \quad (14)$$

$$\rho = \frac{1}{V},$$

де V – питомий об'єм газорідинної суміші;

V_1 – питомий об'єм рідини;

$z_v(T, P)$ – стискуваність пари;

P – локальний статичний тиск і T – локальна температура;

y_v – масова доля пари;

y_g – масова доля розчиненого газу;

μ_v – молярна маса пари;

R_{univ} – універсальна газова постійна.

Масова доля пари y_v обчислюється чисельно з наступного нелінійного рівняння для повної ентальпії газорідинної суміші [8]

$$H = y_g h_g(T, P) + (1 - y_g - y_v) h_l(T, P) + y_v h_v(T, P) + \frac{I_c V^2}{2}, \quad (15)$$

де h_g, h_l, h_v , - ентальпії нерозчиненого газу, рідини та пари, відповідно; $I_c = \rho v_x^2 + (\rho v_y)^2 + (\rho v_z)^2$ – квадратичний імпульс.

Описана модель має наступні обмеження та припущення [8].

1. Кавітація виникає у нестискуваній рідині, для інших рідин та сумішей розрахунок неможливий.

2. Властивості несконденсованого газу однакові з властивостями газу з повітря.

3. Температура та тиск в зоні фазового переходу повинні знаходитися в межах $T = 277,15 \dots 583,15$ К; $P = 800 \dots 10^7$ Па.

4. Модель не описує детальну структуру кавітаційної області, тобто параметри кавітаційних бульбашок.

5. Кавітаційна область має бути добре заповнена розрахунковою сіткою.

6. Параметри течії на вхідних граничних умовах мають бути

такими, щоб об'ємна доля рідкої фази на вході в розрахункову область була не менше 0,1.

Висновки. На даний час існують розвинені математичні моделі кавітаційних процесів. Домінуючі позиції серед них займають моделі, що описують рух окремої бульбашки на основі теорії пульсації поодинокі сферичної бульбашки. До них відносять рівняння Релея, Релея-Плессета, Нолтінга-Нейпараса, Херінга-Фіка, Кірквуда-Бете. Ці рівняння, за виключенням рівняння Релея, не мають загального розв'язку, проте досить легко розв'язуються чисельними методами для умов кожної конкретної наукової або інженерно-технічної задачі.

Серед вищеописаних рівнянь слід виділити рівняння Релея-Плессета, яке з однієї сторони враховує значну кількість факторів, а з іншої сторони записується в лаконічній математичній формі. Через це рівняння Релея-Плессета вважається оптимальною серединою між простотою і точністю і рекомендоване до широкого використання в розрахунках [9].

Крім вищеописаних моделей, існують ускладнені, які враховують теплообмін або взаємодію бульбашок. Проте вони є порівняно складними та приймають велику кількість припущень, тому використовуються тільки в окремих випадках. Для повного описання процесу кавітації необхідно врахування наступних факторів: взаємодія бульбашок, деформація бульбашок, розщеплення бульбашок, утворення кумулятивних струменів, тепло-масообмін та фазові переходи, неідеальність парогазової суміші та зміна її складу та ін.

На даний момент не існує такої математичної моделі, яка б одночасно враховувала всі фактори, що впливають на процес кавітації.

Література:

1. *Смородов Е.А.* Физика и химия кавитации / *Смородов Е.А., Галиахметов Р.Н., Ильгамов М.А.* – М.: Наука, 2008. – 228 с.
2. *Маргуліс М. А.* Звукохимические реакции и сонолюминисценция / *М. А. Маргуліс.* – М. : Химия, 1986. – 288 с.
3. *Маргуліс М.А.* Основы звукохимии (химические реакции в акустических полях): Учеб. пособие для хим. и хим.-технол. спец. вузов / *М. А. Маргуліс.* – М.: Высш. шк., 1984. – 272 с.
4. *Маргуліс М. А., Дмитриева А. Ф.*// ЖФХ. – 1981. –Т. 55. - С. 159; 323.
5. *Розенберг Л.Д.* Кавитационная область / *Л.Д.Розенберг // Мощные ультразвуковые поля / Под ред. Л.Д. Розенберга.* – М.: Наука, 1968. – Ч. 6. – С. 221–266.
6. *Новицкий Б.Г.* Применение акустических колебаний в химико-технологических процессах / *Б.Г.Новицкий.* – М.: Химия, 1983. – 192 с.

7. *Franc Jean-Pierre*. Fundamentals of cavitation / *Jean-Pierre Franc, Jean-Marie Michel*. – Cluwer Academic Publishments, 2005. – 321 p.

8. COSMOS FloWorks Fundamentals / COSMOS Analysis Products. – 2008. – 238 p.

9. *d'Agostino Luca*. Fluid Dynamics of Cavitation and Cavitating Turbopumps / *Luca d'Agostino, Maria Vittoria Salvetti*. – Springer, 2007. – 354 p.

АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КАВИТАЦИИ

Анисимов В. В., Ермаков П. П.

Аннотация–выполнен сравнительный анализ наиболее известных математических моделей кавитации. Выделены ограничения и предположения, касающиеся каждой модели, а также их преимущества. Описаны модели: Рэля, Рэля-Плессета, Нолтинга-Нейпараса, Джилмора и др. Особое внимание уделено конечно-элементному моделированию кавитации на примере однородной равновесной модели.

ANALYSIS OF BASIC MATHEMATICAL MODELS OF THE CAVITATION

V. Arnissimov, P. Ermarkov

Summary

Comparative analysis of the most well-known mathematical models of the cavitation is done. Limitations and assumptions related to each model as well as their benefits are highlighted. Models by Rayleigh, Rayleigh-Plesset, Nolting-Neyparas, Gilmor and others are described. Special attention is given to the finite-element modeling of the cavitation on an example of the homogeneous equilibrium model.