

УДК 621.3.01:519.876.5

## МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЁВА И ЕГО СХЕМНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Тиховод С.М., д.т.н.,  
Корнус Т.М., инженер,  
Токмаков И.В., аспирант \*

*Запорожский национальный технический университет*  
Тел.: 068 458 16 64

**Аннотация** – разработан метод расчета переходных процессов в электрических цепях на основе аппроксимации решения уравнений состояния полиномами Чебышёва. Предложена схемная интерпретация разработанного метода. Показано, что в специальной схеме замещения для изображений токов в виде векторов, содержащих значения коэффициентов разложения этих токов по полиномам Чебышёва справедливы законы Кирхгофа.

**Ключевые слова:** полиномы Чебышёва, переходные процессы, схемная интерпретация.

*Постановка проблемы.* Одними из важных частей современного АПК являются электротехнические системы. Развитие этих систем невозможно без развития методов базовой дисциплины – теоретической электротехники, в том числе теории переходных процессов. Уравнения состояния, описывающие переходный процесс, являются интегро-дифференциальными уравнениями. Реальные исследуемые цепи могут содержать несколько сотен элементов, что приводит к большим системам дифференциальных уравнений и значительному времени моделирования.

*Анализ последних исследований.* Известны методы расчёта переходных процессов в электрических цепях [1 – 3]. Однако, они требуют больших затрат труда и времени для их расчета. Поэтому требуется их усовершенствование.

*Формулирование целей статьи (постановка задания)* – разработка более быстродействующего метода расчета переходных электрических процессов, использующего полиномиальную аппроксима-

цию решения, а также разработка схемной модели метода, создающая удобство при моделировании, что приводит к сокращению времени моделирования.

*Основные материалы исследования (основная часть).* Рассмотрим одноконтурную цепь, содержащую резистивный ( $R$ ), индуктивный ( $L$ ) и емкостный ( $C$ ) элементы, включенные последовательно. Пусть до коммутации конденсатор был заряжен до напряжения  $u_c(0) = u_{c0}$ . При подключении в момент  $t_0$  источника ЭДС  $e(t)$  в цепи происходит переходный процесс, который описывается интегродифференциальным уравнением

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u_c(0) = e(t) \quad . \quad (1)$$

Пусть уравнение, составленное по закону напряжений Кирхгофа, соблюдается точно в заданном ряде узловых временных точек  $t_0, t_1, \dots, t_{N-1}$  для некоторой функции, которая аппроксимирует зависимость тока от времени. В других точках закон напряжений Кирхгофа соблюдается с некоторой погрешностью. Для аппроксимации функции тока от времени будем использовать полиномы Чебышёва 1-го рода. Полиномы Чебышёва 1-го рода определяются на отрезке  $[-1, 1]$  как

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)). \quad (2)$$

Вычисляются они рекурсией

$$T_{n-1}(x) + T_{n+1}(x) = 2x T_n(x), \quad (3)$$

причем  $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$ .

Как известно [2], полиномы Чебышёва 1-го рода ортогональны на сегменте  $[-1, 1]$  с весовой функцией  $h(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ , следовательно, некоторую функцию  $f(x)$ , имеющую на отрезке  $[-1, 1]$  непрерывные производные, можно разложить по полиномам Чебышёва.

Решение уравнения (1), как функцию от времени, в интервале времени  $t \in [a, b]$  разложим по полиномам Чебышёва 1-го рода

$$i(t) \approx p(t) = c_0 T_0(t) + c_1 T_1(t) + c_2 T_2(t) + \dots + c_{N-1} T_{N-1}(t) \quad . \quad (4)$$

Для интерполяции на произвольном конечном отрезке  $t \in [a, b]$  нужно сделать замену переменной

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x \Rightarrow x \in [-1, 1]. \quad (5)$$

Коэффициенты  $c_k$  перед полиномами Чебышёва пока считаем неопределёнными. Определение функции  $i(t)$  заключается в определении значений коэффициентов  $c_k$  ( $k=0 \dots N-1$ ).

Для аппроксимирующего полинома (4) зададим условие метода коллокаций: в точках  $t_k$  деления интервала изменения аргумента

$$i(t_k) = p(t_k) \quad \text{для } k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (6)$$



где  $\mathbf{D}$  – матрица системы линейных уравнений (14),  $\tau = b - a$ ,  $\mathbf{\Gamma} = [i'(t_1) \ i'(t_2) \dots \ i'(t_{N-1})]^T$  – вектор значений производных тока для точек с номером  $k=1, 2, \dots, N-1$ .

Проинтегрируем выражение (4) от  $t_0$  до  $t_m$ , что соответствует точкам  $x_0, x_m$  на отрезке  $[-1, 1]$

$$J(x_m) = \int_{x_0}^{x_m} p(x) dx = \int_{x_0}^{x_m} (c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) + \dots + c_{N-1} T_{N-1}(x)) dx \quad (16)$$

Воспользуемся свойством разложения интеграла функции по полиномам Чебышёва: если некоторую функцию можно разложить по полиномам Чебышёва [3]

$$f(x) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i T_i(x), \quad (17)$$

то интеграл определяется рекурсивной формулой [3]

$$\int f(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{c_{i-1} - c_{i+1}}{2i} T_i(x). \quad (18)$$

В результате, используя свойство (18) для выражения (16), получим

$$\begin{aligned} J(x_m) &= \int_{x_0}^{x_m} p(x) dx = \delta_m i_0 + \left\{ \frac{1}{4} [T_2(x_m) - T_2(x_0)] - T_1(x_0) \delta_m \right\} c_1 + \dots \\ &+ \left\{ \left[ \frac{T_{k+1}(x_m) - T_{k+1}(x_0)}{2(k+1)} - \frac{T_{k-1}(x_m) - T_{k-1}(x_0)}{2(k-1)} \right] - T_k(x_0) \delta_m \right\} c_k + \dots \\ &+ \left\{ \left[ \frac{T_N(x_m) - T_N(x_0)}{2N} - \frac{T_{N-2}(x_m) - T_{N-2}(x_0)}{2(N-2)} \right] - T_{N-1}(x_0) \delta_m \right\} c_{N-1} = \\ &= S_{m,1} c_1 + S_{m,2} c_2 + \dots + S_{m,k} c_k + \dots + S_{m,N-1} c_{N-1} + \delta_m i_0. \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрев выражение (19) при значениях  $x$  во всех узловых точках при изменении номера  $m$  от 1 до  $N-1$ , получим систему уравнений, которая в матричной форме имеет вид:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & \dots & S_{1,N-1} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & \dots & S_{2,N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{N-1,1} & S_{N-1,2} & \dots & S_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix} + i_0 \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

или

$$\mathbf{J} = \mathbf{S} \mathbf{C} + \Delta \cdot i_0, \quad (21)$$

где  $\mathbf{J}$  – вектор интегралов (24) для значений  $k=1, 2, \dots, N-1$ ;

$$\Delta = [\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_{N-1}]^T; \quad (22)$$

Преобразуем интегро-дифференциальное уравнение (1) с учетом аппроксимации (4) для точек  $k = 1, 2, \dots, N-1$ . Получим в матричной форме выражение

$$L\mathbf{I}' + R\mathbf{I} + B\mathbf{J} + u_{C0} = \mathbf{e}, \quad (23)$$

где  $B=1/C$ ,  $\mathbf{e}$  – вектор значений ЭДС источника в точках 1, 2, ...,  $N-1$  текущего временного сегмента.

Если подставить в выражение (23) матрицы  $\mathbf{I}$  (9),  $\mathbf{I}'$  (14),  $\mathbf{J}$  (20), то получим выражение закона напряжений Кирхгофа для изображения  $\mathbf{C}$  тока  $i(t)$

$$(LD + RV + BS)\mathbf{C} = \mathbf{e} - u_{C0} - Ri_0 - B\Delta \cdot i_0. \quad (24)$$

Зная вектор  $\mathbf{C}$  коэффициентов полиномиальной аппроксимации функции тока  $i(t)$  и начальные значения тока  $i_0$  можно определить значения тока во всех произвольных точках временного сегмента  $\tau$  согласно (4)

$$i(x) \approx i_0 + c_1(T_1(x) - T_1(x_0)) + c_2(T_2(x) - T_2(x_0)) + \dots + c_{N-1}(T_{N-1}(x) - T_{N-1}(x_0)). \quad (25)$$

**Схемная интерпретация метода численного расчета переходных процессов в магнитоэлектрических цепях.** Уравнение (24) можно интерпретировать следующим образом. Пусть в исходной ветви  $R-L-C$  протекает ток  $i(t)$ . Исходной ветви соответствует ветвь замещения (рис.1), по которой протекает изображение  $\mathbf{C}$ , тока  $i(t)$ .

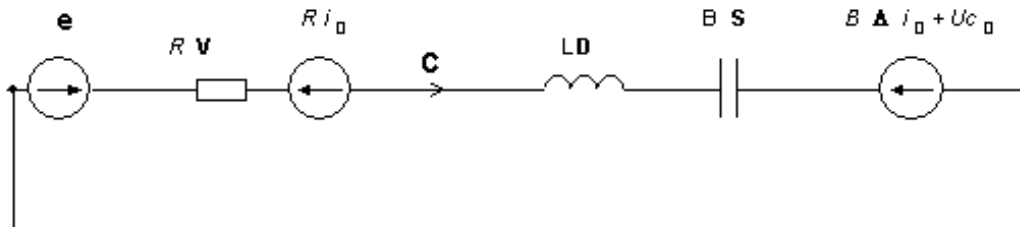


Рис. 1. Схема замещения одноконтурной  $R-L-C$ -  $e$  цепи.

На схеме замещения вместо оригинала тока имеем изображение  $\mathbf{C}$  – это вектор коэффициентов разложения тока  $i(t)$  по полиномам Чебышева. При этом в ветви замещения резистивный элемент имеет изображение сопротивления  $RV$  и последовательно с ним навстречу току включается постоянная ЭДС величиной  $R \cdot i_0$  (рис.1). Индуктивный элемент имеет изображение  $LD$ , а емкостный элемент – изображение  $BS$  и последовательно с ним навстречу току включается источник постоянной ЭДС величиной  $B\Delta i_0 + u_{C0}$ .

Можно доказать, что в узлах схемы замещения для изображений  $\mathbf{C}$  соблюдается закон токов Кирхгофа

$$\sum_{k=1}^b C_k = 0. \quad (26)$$

Следовательно, при известных значениях токов ветвей  $i_{0k}$  и напряжений на конденсаторах  $u_{C0k}$  в начале сегмента  $[t_0, t_{N-1}]$ , система уравнений, составленная по законам Кирхгофа для изображений токов для всех узлов без одного и для всех главных контуров, имеет единственное решение. В результате решения системы линейных алгебраических уравнений получаем векторы  $\mathbf{C}_k$ , содержащие значения коэффициентов разложения функций токов по полиномам Чебышёва для всех ветвей. Зная для любой ветви коэффициенты разложения тока  $i(t)$  по полиномам Чебышёва, значение  $i_0$  и напряжение на конденсаторе  $u_{C0}$  в начальной точке  $t_0$ , мы можем получить значение тока и напряжения на конденсаторе во всех узловых точках в интервале времени  $[t_0, t_{N-1}]$

$$\mathbf{I} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{C} + i_0. \quad (27)$$

Если положения опорных точек  $x_k$  в сегменте  $[-1, 1]$  выбирать не равномерно, а в нулях полиномов Чебышёва, то погрешность интерполяции можно существенно снизить. В этом случае плотность опорных точек сгущается на краях сегмента.

**Пример расчета переходного процесса в электрической цепи.** Для апробации разработанного метода составлена компьютерная программа для расчета переходного процесса в электрической цепи (рис.2).

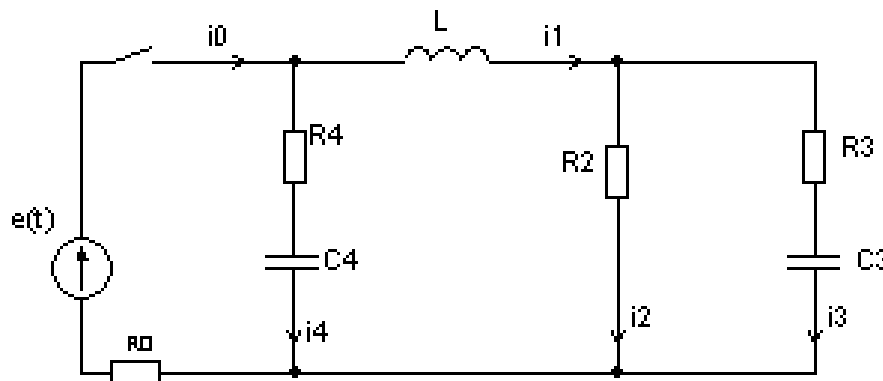


Рис. 2. Электрическая схема исследуемой модельной цепи.

Согласно правилу преобразования, показанному на рис.1, составим схему замещения для изображений токов.

На схеме замещения (рис. 3) дополнительные источники ЭДС имеют следующие обозначения: первый индекс – «0» значение тока берется в точке  $k=0$  текущего временного интервала; второй индекс обозначает номер ветви в цепи.  $\mathbf{C}_0 - \mathbf{C}_4$  – векторы-изображения токов ветвей, содержащих изображения сопротивления и ЭДС.

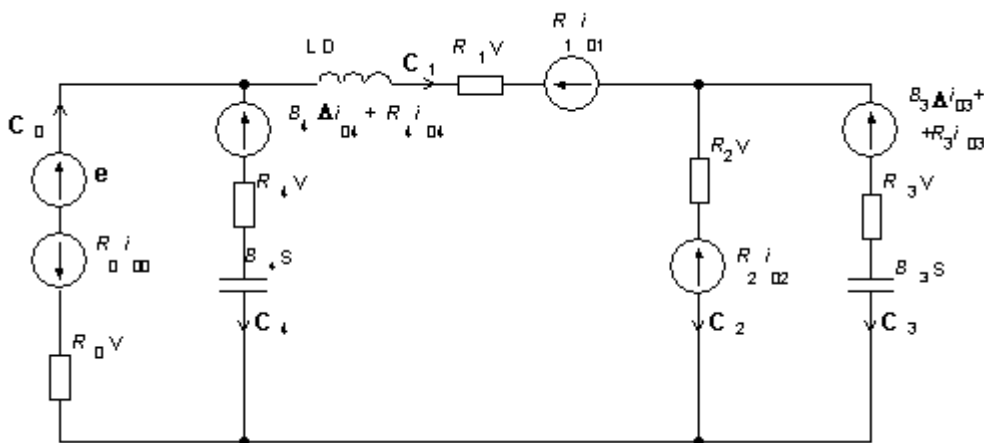


Рис. 3. Схема замещения для модельной цепи.

Для схемы замещения, показанной на рис. 3, система уравнений, составленная по законам Кирхгофа для изображений токов, имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned}
 C_0 - C_1 - C_4 &= 0; \\
 C_1 - C_2 - C_3 &= 0; \\
 R_0 VC_0 + R_4 VC_4 + B_4 SC_4 &= e - R_0 i_{00} - R_4 i_{04} - B_4 \Delta i_{04} - u_{C04}; \\
 R_1 VC_1 + LDC_1 + R_2 VC_2 - B_4 SC_4 - R_4 VC_4 &= -R_1 i_{01} - R_2 i_{02} + B_4 \Delta i_{04} + u_{C04} + R_4 i_{04}; \\
 -R_2 VC_2 + R_3 VC_3 + B_3 SC_3 &= R_2 i_{02} - R_3 i_{03} - B_3 \Delta i_{03},
 \end{aligned} \right\} (28)$$

где  $i_{00}, i_{01}, i_{02}, i_{03}, i_{04}, u_{C03}, u_{C04}$  – значения токов ветвей 0-4 и напряжений на конденсаторах 3,4 в начале текущего цикла,  $\Delta$  – вектор отклонения узловых точек от нулевой точки.

Система уравнений (28) для изображений токов и напряжений является системой алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами, и имеет единственное решение – векторы  $C_b$ , где номер ветви  $b=0\dots4$ .

По программе VDS\_C, составленной согласно предложенному методу, выполнен расчет переходного процесса, результаты которого представлены на рис.4. При этом достигнута максимальная погрешность не больше 0,1% . Для оценки точности вычислений предложенным методом выполнен также точный аналитический расчет переходного процесса при тех же значениях исходных данных.

На графике рис.4 совмещены кривые, полученные численным методом и табулированием аналитического решения, причем значения, соответствующие точному аналитическому выражению, показаны крупными точками. Выполнен также расчет модельной задачи при использовании метода Гира. Сравнение процессорного времени расчета модельной задачи по предложенному методу и по методу Гира показало, что при решении модельной задачи предложенный метод имеет быстродействие более чем в четыре раза лучшее, чем многошаговый метод Гира.

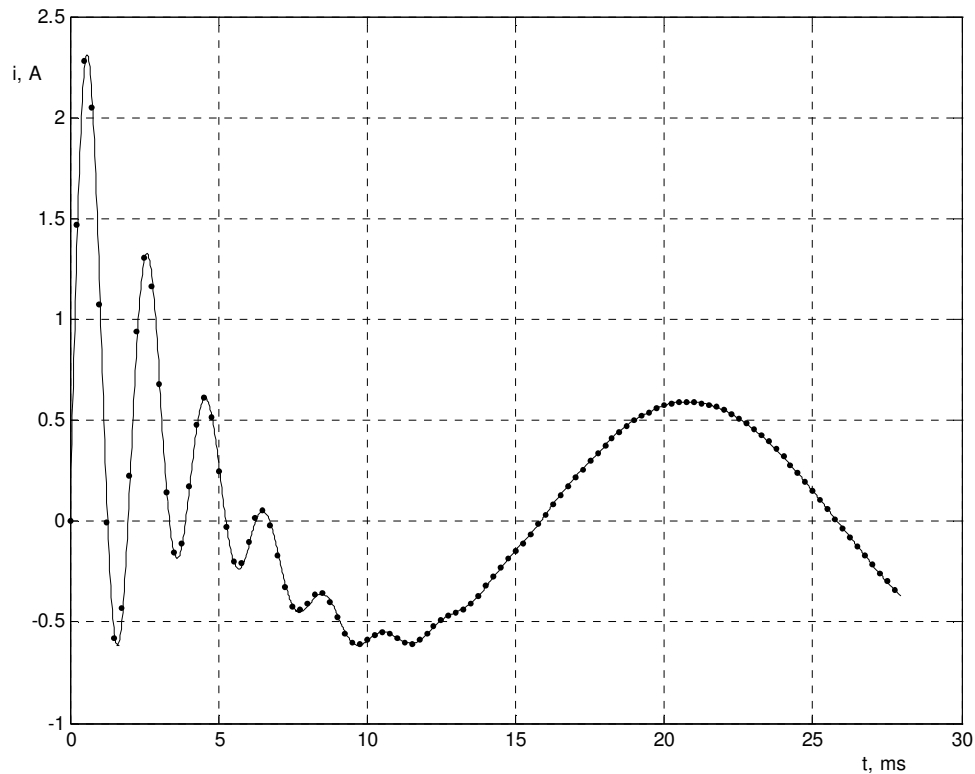


Рис. 4. Зависимость тока  $i_i(t)$ , полученная в результате расчета по программе VDS\_C.

*Выводы.* Предложенный метод расчета переходных процессов в электрических цепях позволяет интегро-дифференциальные уравнения состояния сводить к алгебраическим уравнениям. Сравнение процессорного времени расчета модельной задачи по предложенному методу и по методу Гира показало, что при решении модельной задачи предложенный метод имеет быстродействие в четыре раза лучшее, чем многошаговый метод Гира.

*Список использованных источников.*

1. Зевеке Г.В. Основы теории цепей / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. – Москва: Энергоатомиздат, 1987. – 424с.
2. Ильина В.А. Численные методы для физиков-теоретиков.1. / В.А. Ильина, П.К. Силаев. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2003. – 132с.
3. Васильев Н.И. Применение полиномов Чебышева в численном анализе. / Н.И. Васильев, Ю.А. Клоков, А.Я. Шкерстена. – Рига: Зинатне. – 1984. – 240с.



**МЕТОД ЧИСЛОВОГО РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ  
ПРОЦЕСІВ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ З ВИКОРИСТАННЯМ  
ПОЛІНОМІВ ЧЕБЫШОВА ТА ЙОГО СХЕМНА  
ІНТЕРПРЕТАЦІЯ**

Тиховод С.М., Корнус Т.М., Токмаков І.В.

**Анотація – розроблено метод розрахунку перехідних процесів в електричних колах на основі апроксимації розв’язку рівнянь стану поліномами Чебышова. Запропонована схемна інтерпретація розробленого методу. Показано, що в спеціальній схемі заміщення для зображень струмів у вигляді векторів, що містять значення коефіцієнтів розкладу цих струмів по поліномах Чебишова, справедливі закони Кирхгофа.**

**NUMERICAL CALCULATION OF TRANSIENTS IN ELECTRIC  
CIRCUITS WITH USE OF CHEBYSHEV’S POLYNOMS AND  
CIRCUIT INTERPRETATION OF IT**

S. Tykhovod, T. Kornus, I. Tokmakov

*Summary*

**Computation of transients in electric circuits is developed on the basis of approximation of state equations solution by the help of Chebyshev’s polynoms. Circuit interpretation of the developed method is offered. It is shown that Kirchhoff’s rules for images of currents in the form of the vectors, containing the factors values of Chebyshev’s polynoms decomposition of these currents, are fair in the special equivalent circuit.**