

УДК 629.114.2

ДО ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ РУХУ БАГАТОЕЛЕМЕНТНИХ МОБІЛЬНИХ МАШИН ТА ОБГРУНТУВАННЮ ЗВ'ЯЗКІВ МІЖ НИМИ

Антощенко Р.В., к.т.н., докторант.

*Харківський національний технічний університет сільського
господарства ім. П. Василенка*

Тел. (057) 732-97-95

Анотація – робота присвячена побудові математичної моделі руху багатоелементних мобільних машин та обґрунтуванню зв'язків між ними. Приведені поширені приклади способів з'єднання мобільних машин та їх математичний опис.

Ключові слова– математична модель, багатоелементні мобільні машини, зв'язки.

Постановка проблеми. Сучасні сільськогосподарські машинно-тракторні агрегати являють собою багатоелементні мобільні машини. Посівні агрегати складаються з трьох елементів, таких як трактор, ємність для посівного матеріалу і сівалки, що рухаються послідовно один за одним [1]. Відомі компоновальні схеми посівних агрегатів, у яких ємність і сівалка можуть змінювати послідовність розташування або ємність для посівного матеріалу може перебувати на тракторі і бути жорстко пов'язана з ним. Динаміка даних машин залишається недостатньо дослідженою. При зміні структури досліджуваної багатоелементної мобільної машини необхідно заново перебудувати математичну модель, що потребує значного часу та зусиль.

Аналіз основних досліджень. На практиці для дослідження динаміки багатоелементних машин застосовують рівняння Лагранжа 2-го роду [2]. Існує робота [3] в якій рух мобільної машини вивчають спільно з напівприцепом за допомогою рівнянь Лагранжа 1-го роду. Також досліджена динаміка і стійкість одноелементних [4] мобільних машин. Сільськогосподарські машини та агрегати в дослідженнях динаміки представляли у вигляді одно-, двох- і трьохмасових моделей в трьохмасових роботах [5, 6].

У наведених роботах математична модель руху багатоелементної машини є цілісною і при зміні структури або внутрішніх зв'язків-

©Антощенко Р. В.

*Науковий консультант - д.т.н., проф.Лебедев А.Т.

необхідно перебудувувати її заново, що призводить до збільшення витрат праці і часу на дослідження. Якщо число елементів більше двох і відстань від задньої осі мобільної машини до точки причепа більше нуля, то не існує рішення для рівнянь Лагранжа 2-го роду [7].

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Метою даної роботи є розробка методології побудови математичної моделі багатоелементних мобільних машин, яка дозволяє підвищити точність результатів рішення, скоротити витрати часу та праці на дослідження. Методологія при зміні структури досліджуваної багатоелементної мобільної машини дозволить перебудувувати математичну модель з мінімальними витратами. В роботі обґрунтовуються типи зв'язків між елементами моделі та їх математичний опис.

Основна частина. Припустимо, що на систему, що складається з N матеріальних точок $B_j (j=1, \dots, N)$ з масами m_j , діють задані сили \bar{F}_j . Положення кожної точки визначається вектором $\bar{r}_j(x_j, y_j, z_j)$ в прийнятій інерційній системі декартових координат; x_j, y_j, z_j – декартові координати точок. Кінематичний стан системи характеризуємо векторами: $\bar{v}_j = \dot{\bar{r}}_j$ (швидкість точки) та $\bar{a}_j = \dot{\bar{v}}_j = \ddot{\bar{r}}_j$ (прискорення точки) [8].

На систему діють сили \bar{F}_j , тобто сили, що виражаються відомими функціями координат і швидкостей (всіх точок системи) і часу t :

$$\bar{F}_j = \bar{F}_j(x_j, y_j, z_j, \dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j, t). \quad (1)$$

Також на систему накладені голономні зв'язки, що виражені у декартових координатах, які дозволяють виразити всі $3N$ декартові координати через n узагальнених координат q_i не підпорядкованих ніяким співвідношенням, що їх зв'яже, тобто система має n ступенів свободи. Отже, при реономних зв'язках буде:

$$\bar{r}_j = \bar{r}_j(q_i, t) \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (2)$$

Для складання рівнянь руху необхідно знайти змінні q_i а також для обчислити реакції зв'язку \bar{R}_j .

Складемо систему рівнянь руху динамічної системи, що виражає рух даної матеріальної системи в декартових координатах. Вона складеться з системи динамічних рівнянь руху точок системи:

$$m_j \ddot{\bar{r}}_j = \bar{F}_j + \bar{R}_j, \quad (3)$$

де \bar{R}_j – реакції зв'язків, і системи рівнянь голономних зв'язків $f_\rho(\bar{r}_j, t) = 0$ ($\rho = 1, 2, \dots, s$) (у декартових координатах число рівнянь дорівнює $3N + s$).

Рівняння (3), згідно принципу Д'Аламбера, має вигляд:

$$-m_j \ddot{\bar{r}}_j + \bar{F}_j + \bar{R}_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (4)$$

Машини і засоби механізації сільськогосподарського виробництва

Як сказано вище, сільськогосподарські машинно-тракторні агрегати є багатоелементними з різноманітними способами приєднання. Розглянемо деякі з них.

Система рівнянь руху машини в загальному вигляді [9]:

$$\begin{cases} ma_i = F_i + R_i; \\ I_i \theta_i = M_i, \end{cases} \quad (5)$$

де m - маса машини; a_i - прискорення машини у відповідній осі; i - ось x, y, z ; F_i, M_i - сили та моменти, що діють на корпус машини; R_i - реакції зв'язку; θ_i - кутове прискорення навколо осей α, β, γ ; I_i - приведені моменти інерції машини до відповідних осей.

Навісний плуг при агрегуванні з трактором з'єднується жорстко. Жорстке з'єднання двох динамічних моделей наведено на рис. 1.

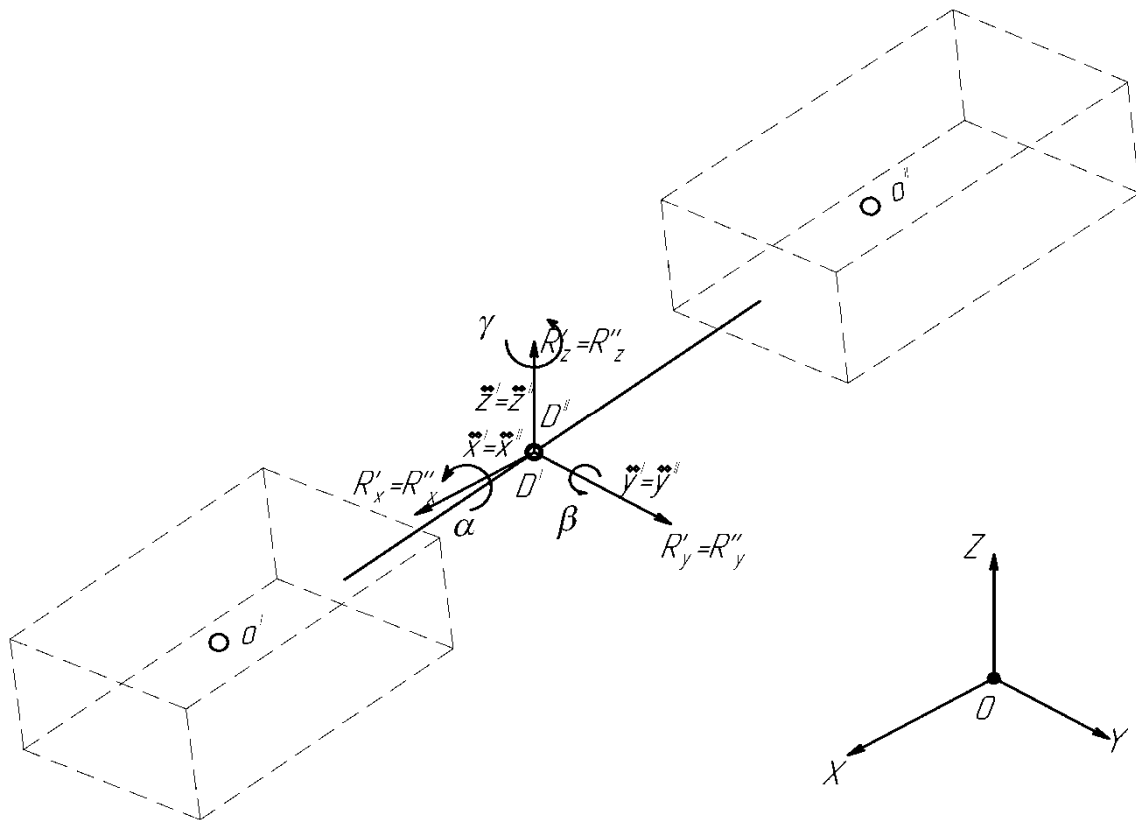


Рис. 1. Схема жорсткого з'єднання двох динамічних моделей:
 O - центр глобальної системи координат XYZ ; o' і o'' - центри мас динамічних моделей; D' і D'' - точки з'єднання моделей;
 $R'_x, R'_y, R'_z, R''_x, R''_y, R''_z$ - проекції реакції зв'язків моделей на глобальну систему координат; $\ddot{x}', \ddot{y}', \ddot{z}', \ddot{x}'', \ddot{y}'', \ddot{z}''$ - проекції прискорень відповідних осей точок D' і D'' на глобальну систему координат;
 α, β, γ - кути повороту місця з'єднання динамічних моделей.

Реакції зв'язків між елементами динамічними моделями можна поділити на два типи: кінематичні та силові.

Кінематичними зв'язками жорсткого з'єднання двох динамічних моделей є проекції прискорень точок з'єднання D' і D'' на глобальну систему координат $\ddot{x}', \ddot{y}', \ddot{z}', \ddot{x}'', \ddot{y}'', \ddot{z}''$ та швидкостей обертання $\dot{\alpha}', \dot{\beta}', \dot{\gamma}', \dot{\alpha}'', \dot{\beta}'', \dot{\gamma}''$. Тоді система кінематичних зв'язків для жорсткого з'єднання буде наступною:

$$\begin{cases} \ddot{x}'_{D'} = \ddot{x}''_{D''}, \\ \ddot{y}'_{D'} = \ddot{y}''_{D''}, \\ \ddot{z}'_{D'} = \ddot{z}''_{D''}, \\ \dot{\alpha}'_{D'} = \dot{\alpha}''_{D''}, \\ \dot{\beta}'_{D'} = \dot{\beta}''_{D''}, \\ \dot{\gamma}'_{D'} = \dot{\gamma}''_{D''}, \end{cases} \quad (6)$$

де $\ddot{x}'_{D'}, \ddot{y}'_{D'}, \ddot{z}'_{D'}$ – проекції прискорень т. D' на глобальну систему координат; $\ddot{x}''_{D''), \ddot{y}''_{D''), \ddot{z}''_{D'}$ – проекції прискорень т. D'' ; $\dot{\alpha}'_{D'}, \dot{\alpha}''_{D''), \dot{\beta}'_{D'}, \dot{\beta}''_{D''), \dot{\gamma}'_{D'}, \dot{\gamma}''_{D'}$ – кутові швидкості обертання точок з'єднання.

Відповідно, силовими реакціями зв'язків є проекції сил в місці з'єднання двох динамічних моделей на глобальну систему координат:

$$\begin{cases} R'_x = R''_x, \\ R'_y = R''_y, \\ R'_z = R''_z. \end{cases} \quad (7)$$

Моделью руху багатоелементного агрегату з жорстким з'єднанням елементів між собою є система рівнянь (5-7).

Сучасні посівні агрегати складаються з двох та більше елементів, що рухаються один за одним. Тоді система кінематичних зв'язків для з'єднання типу шарнір (в якому незначна сила тертя та якою можна знехтувати) буде наступною:

$$\begin{cases} \ddot{x}'_{D'} = \ddot{x}''_{D''}, \\ \ddot{y}'_{D'} = \ddot{y}''_{D''}, \\ \ddot{z}'_{D'} = \ddot{z}''_{D''}, \end{cases} \quad (8)$$

а силові реакції зв'язків будуть:

$$\begin{cases} R'_x = R''_x, \\ R'_y = R''_y, \\ R'_z = R''_z. \end{cases} \quad (9)$$

Система рівнянь моделі руху багатоелементного агрегату з шарнірним з'єднанням елементів між собою включає рівняння (5, 8, 9). Обґрунтовані рівняння зв'язків приведені для двох поширених випадків приєднання багатоелементних машин між собою. Зміна взаємного розташування елементів призводить до зміни рівнянь зв'язку, система рівнянь, що описує рух окремих елементів залишається без змін.

Висновки. В роботі розроблена методологія побудови математичної моделі багатоелементних мобільних машин, що дозволяє підвищити точність результатів рішення, скоротити витрати часу та праці на дослідження. Дана методологія при зміні структури досліджуваної багатоелементної мобільної машини дозволяє перебудовувати математичну модель з мінімальними витратами. Математично обґрунтовані типи зв'язків між елементами моделі та їх опис.

Література:

1. *Красовских В.С.* Результаты исследования почвообрабатывающего посевного тягово-транспортного агрегата [Текст] / В.С. Красовских, Н.Н. Бережнов // Вестник Алтайского государственного аграрного университета. – 2007. – № 4. – С.57-61.
2. *Laceklis-Bertmanis J.* Mathematical model of tractor aggregate [Text] / J. Laceklis-Bertmanis, E. Kronbergs // ASAE, St. Joseph, MI. – 1996 – P. 431-442.
3. *Chieh C.* Dynamic modeling of articulated vehicles for automated highway systems [Text] / C. Chieh, T. Masayoshi // In Proceedings of the American Control Conference, Seattle, USA. – 1995. – P. 653-657.
4. *Смирнов Г.А.* Теория движения колесных машин [Текст] / Г.А. Смирнов – М.: Машиностроение. – 1981. – 318с.
5. *Гячев Л.В.* Устойчивость движения сельскохозяйственных машин и агрегатов [Текст] / Л.В. Гячев – М. Машиностроение, 1981. – 206 с.
6. *Legecuis T.* On the extension of the gratzmuller critical velocity for locked steering road vehicle to the case of piloted vehicles [Text] / T. Legecuis, P. Bourassa, A. Laneville // Vehicle system dynamics. – 1985. – №14. – P. 615-622.
7. *A. De Luca.* Modelling and control of nonholonomic mechanical systems [Text] / A. De Luca, G. Oriolo // Kinematics and Dynamics of

Multi-Body Systems (J. Angeles, A. Kecskemethy Eds.). Springer-Verlag, – 1995. – P. 301-305.

8. *Добронравов В.В.* Основы аналитической механики [Текст] / В.В. Добронравов. – М.: Высшая школа, 1976. – 264 с.

9. *Толстолюбский В.А.* Методология моделирования функционирования многоэлементных мобильных машин на плоской горизонтальной поверхности [Текст] / В.А. Толстолюбский, Р.В. Антощенко // Молодой ученый.- Чита, 2013. – № 11 (58) – С. 186-191.

К ПОСТРОЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ МОБИЛЬНЫХ МАШИН И ОБОСНОВАНИЮ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ НИМИ

Антощенко Р.В.

Аннотация – работа посвящена построению математической модели движения многоэлементных мобильных машин и обоснованию связей между ними. Приведены распространенные примеры способов соединения мобильных машин и их математическое описание.

CONSTRUCTING A MATHEMATICAL MODEL OF THE MOVEMENT OF MULTI-PART MOBILE MACHINES AND JUSTIFICATION OF BONDS BETWEEN THEM

R. Antoshenkov

Summary

Constructing a mathematical model of the motion of multi-part machines and substantiation of bonds between them are presented in this article. Common examples of ways to connect mobile machines and their mathematical description are considered.