

УДК 637.33

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНОЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ ПИЩЕВЫХ МАСС

Курилович Н.Н., к.т.н.,

Киркор М.А., к.т.н.

*Могилевский государственный университет продовольствия*

Тел. (+375222) 45-35-78

**Аннотация** – предложена формула для оценки предельной вязкопластической деформации пищевых масс по схемам старения и течения. Формула получена из уравнений механических состояний, описывающих условия возникновения вязкопластических деформаций и построенных на основании опытов на кратковременную ползучесть.

**Ключевые слова** – напряжение, деформация, скорость ползучести.

Экспериментальное исследование реологических свойств пищевых масс [1-6] показало наличие четырех видов деформаций: мгновенно-упругой, мгновенно-пластической, вязкоупругой и вязкопластической. Наибольшее значение в этих опытах имела вязкопластическая деформация, которая накапливалась в течение незначительного промежутка времени (до 10 с). Поэтому проведем теоретическую оценку предельной вязкопластической деформации по схемам старения и течения.

Во всех опытах наблюдалась нелинейная ползучесть, то-есть когда деформации увеличиваются непропорционально увеличению напряжений и для определения вязкопластической деформации в каждой момент времени  $\theta$  принималось конечное соотношение в виде:

$$\varepsilon^{Bn} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_*}\right)^m V(\theta), \quad (1)$$

где  $\sigma$  – рабочее напряжение;  $\sigma_*$  - некоторое фиксированное напряжение, принимаемое по любой кривой ползучести;  $V(\theta)$  – график изменения скорости ползучести во времени при каком-либо из исследуемых уровней напряжений [6].

Дадим інтерпретацію явлення висчерпання несущей способности материала в условиях его монотонного вязкопластического деформирования. В соответствии с (1) предлагается существование в пространстве  $\sigma$ ,  $\theta$ ,  $\mathcal{E}$  (напряжения, время, деформация) единственной поверхности

$$\mathcal{E} = f\left(\frac{\sigma}{\sigma_*}\right)B(\theta). \quad (2)$$

Любое возможное состояние вязкопластического равновесия изображается некоторой линией, лежащей на указанной поверхности (рис. 1)

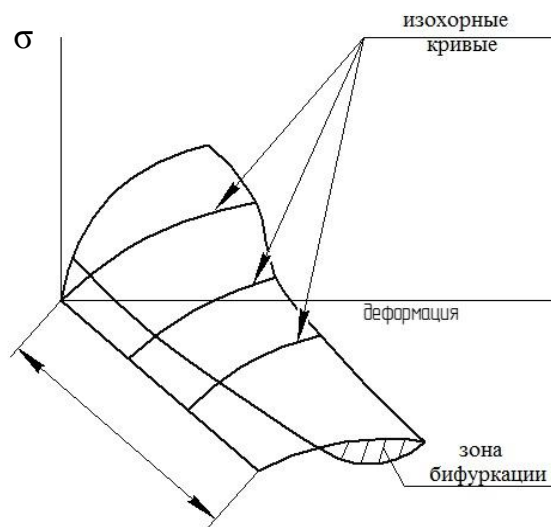
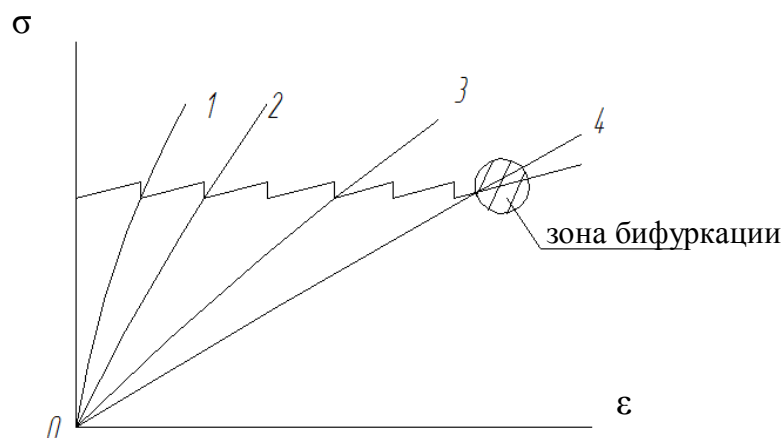


Рис. 1. Поверхность в трехмерном пространстве: напряжения, деформация, время ( $\sigma$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\theta$ ).

Предельная деформация достигается в тот момент, когда эта линия приобретает общую касательную к одной из изохорных кривых (рис. 2).



1, 2, 3, 4 – изохронные кривые, полученные при  $\theta = \theta_k$ .

Рис. 2. Проекция изохорных кривых на плоскости  $\theta$ - $\mathcal{E}$ .

Под изохорными кривыми понимают диаграммы  $\sigma - \varepsilon$  при определенном (фиксированном) времени вязкопластического течения. Для этого строятся диаграммы ползучести при различных напряжениях и одного и того же значения времени  $\theta = \theta_k$ , которое при этом рассматривается как параметр и определяются соответствующие значения вязкопластической деформации для каждого уровня напряжений.

Обозначим  $\theta_k$  - фиксированное время ползучести состояния «А» (рис. 1). В следующие моменты времени состояние вязкопластического равновесия больше не существует. Отметим, что такое предельное состояние «А» можно трактовать как некоторое состояние безразличного равновесия (бифуркации) в «малом», так как наряду с ним в тот же момент времени могут существовать смежные состояния «А», «А<sub>1</sub>» и т.д. соответствующие точкам общей касательной к изохронной кривой и к линии, изображающей деформационный процесс. Начальное напряжение  $\sigma_0$  определяется как отношение нагрузки к площади поперечного сечения. Последняя в процессе деформирования уменьшается и, следовательно, истинное напряжение увеличивается [7] и равно

$$\sigma = \sigma_0(1 + \varepsilon) = \sigma_0 \exp \varepsilon, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  – истинная деформация, происходящая при неизменности объема материала [7], измеряемая в шейке образца.

Выражение (3) является уравнением проекции линии деформационного процесса на плоскость  $\theta = \text{const}$ . Уравнение проекции той же линии на плоскость  $\sigma = \text{const}$  получим, исключая напряжение из уравнения (1)

$$\varepsilon = f\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_*}\right) B(\theta) = \varphi(\varepsilon) B(\theta). \quad (4)$$

Так как углы наклона касательной к кривой (3) и к изохронной кривой (2) в критической точке совпадают, то для предельного времени вязкопластического течения  $\theta_{\pi}$  можно записать

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\sigma_0 \exp \varepsilon) = \left[ B(\theta) \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^m \right]^{-1}, \quad (5)$$

из (2) имеем

$$B(\theta) = \frac{\varepsilon}{f\left(\frac{\sigma}{\sigma_*}\right)}.$$

Поставим в (5) и, проводя преобразования, получаем

$$\varepsilon_n \exp \varepsilon = \frac{f\left(\frac{\sigma}{\sigma_*}\right)}{\sigma_0 \frac{d}{d\sigma} f\left(\frac{\sigma}{\sigma_*}\right)} \quad (6)$$

$$\varepsilon_n \exp \varepsilon = \frac{\varphi(\varepsilon)}{\sigma_0 \frac{d}{dG} f\left(\frac{\sigma}{\sigma_*}\right)}, \quad (7)$$

где  $\varepsilon_n$  – предельная истинная деформация, для определения которой в общем случае служит довольно сложного вида уравнение (7). В частном случае

$$f\left(\frac{\sigma}{\sigma_*}\right) = \left(\frac{\sigma}{\sigma_*}\right)^m = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma} \exp \varepsilon\right)^m \quad (8)$$

для  $\varepsilon_n$  получается простой ответ

$$\varepsilon_n \exp \varepsilon_n = \frac{\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_*}\right)^m \exp \varepsilon_n m}{\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_*}\right)^m \left(\frac{\sigma}{\sigma_*}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \exp \varepsilon_n \quad (9)$$

или  $\varepsilon_n = \frac{1}{m}$ .

Другим признаком предельного состояния может служить обращение в бесконечность производной по времени от деформации вязкопластического течения.

$$\dot{B}(\theta) = \frac{dB(\theta)}{d\theta}. \quad (10)$$

Дифференцируя выражение (4), получаем

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = B(\theta) \frac{d\varphi}{d\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{d\theta} + \varphi(\varepsilon) \dot{B}(\theta). \quad (11)$$

Обозначая  $d\varepsilon/d\theta = \dot{\varepsilon}$ , получим

$$\dot{\varepsilon} \cdot \left[1 - \frac{d\varphi}{d\varepsilon} B(\theta)\right] = \varphi(\varepsilon) \dot{B}(\theta) \quad (12)$$

Так как в предельном состоянии  $\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$ , то, с учетом (4), получаем

$$1 - \frac{d\varphi}{d\varepsilon} B(\theta) = 1 - \frac{d\varphi}{d\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{\varphi(\varepsilon)} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\varepsilon}{\varphi(\varepsilon)} \cdot \frac{d\varphi}{d\varepsilon} = 1. \quad (14)$$

Для частного случая кривая деформирования  $f = \sigma^m$ ,  $\varphi = \sigma_0 \exp m \cdot \varepsilon$ . Положим, как принято выше, что

$$\varphi(\varepsilon) = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_*}\right)^m \exp m \varepsilon.$$

Дифференцируем

$$\frac{d\varphi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = m \exp m \varepsilon \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_*}\right)^m.$$

Подставляя в (14), получим

$$\frac{m \exp m \varepsilon \cdot \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_*}\right)^m \varepsilon}{\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_*}\right)^m \exp m \varepsilon} = 1. \quad (15)$$

или

$$\varepsilon = \frac{1}{m}, \quad (16)$$

что совпадает с (9).

Вернемся к выражению (2) и покажем методику определения величины  $m$  и функции  $\dot{B}(\theta)$ , предложенной в работе [6]. Имея даже небольшое семейство кривых ползучести, для какого-нибудь фиксированного промежутка времени  $\theta_*$  можно построить график зависимости  $L = \varepsilon^{\text{Бп}} / B(\theta_*)$  относительно  $\sigma / \sigma_*$ ,  $\sigma_*$  – может быть принято для любой фиксированной кривой. Так, при испытании сычужных сыров  $\sigma_* = 0,065 \text{ МПа}$ ,  $\sigma$  – уровень напряжений для другой кривой ползучести и такая кривая для сыра «Брынза Могилевская» показана на рис. 3.



Рис. 3. Зависимость отношения деформаций от отношения действующих напряжений  $\sigma/\sigma_*$ .

Получаемая экспериментальная зависимость аппроксимируется, в частности, степенной зависимостью  $L = C \cdot (\sigma/\sigma_*)^m$ , где постоянная  $C$  и  $m$  определяется из условия лучшего описания этой зависимости.  $C = 0,35, m = 3,5$ .

Функция  $\dot{V}(\theta)$  определяется как график скорости вязкопластической деформации при  $\sigma = \sigma_*$  и показана на рисунке 4. Этот график приведен в работе [6].

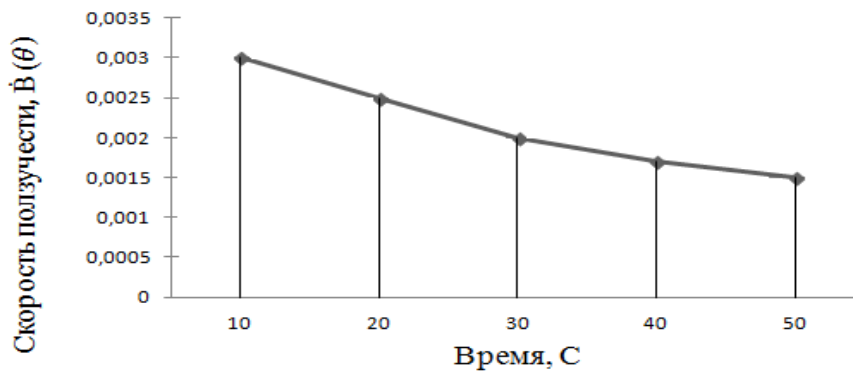


Рис. 4. Зависимость скорости ползучести  $\dot{V}(\theta)$  от времени выдержки под нагрузкой для опытного сыра при  $\sigma_* = 0,065$  МПа.

Таким образом, величина предельной вязкопластической деформации составляет  $1/m = 1/3,5 = 0,29$ .

В заключение следует отметить, что для оценки предельной вязкопластической деформации пищевых масс при их деформировании предложена удобная формула, позволяющая прогнозировать условие возникновения предельного состояния. Эта формула получена из уравнения механических состояний, описывающего условие возникновения и развития вязкопластических деформаций.

#### Литература:

1 Курилович Н.Н. Инженерная реология пищевых масс / Н.Н. Курилович, Е.Ф. Тихонович.– Могилев, УО «МГУП», 2009 – 123 с.

2 Курилович Н.Н. Физические свойства уплотненного теста, изготовленного с использованием ржаной муки / Н.Н. Курилович, Е.Ф. Тихонович: Ст. научных трудов к 30-летию Могилевского государственного университета продовольствия. Редкол. Т.С.Хасаншин и др.- Минск: изд.центр БГУ,2003. – С. 105-110.

3 Василенко З.В. Исследование структурно-механических характеристик майонезов функционального назначения /

З.В. Василенко [и др.] // Вестник Могилевского государственного университета продовольствия. – 2009. – №2 (7). – С. 3-9.

4 *Курилович Н.Н.* Реологические свойства мягких сычужных сыров. / Н.Н. Курилович, Т.И.Шингарева, С.В. Красноцкий // Вестник Могилевского государственного университета продовольствия. – 2008. – №1 (5). – С. 41-46.

5 *Курилович Н.Н.* Влияние температурно-влажностных характеристик пророщенного зерна на его структурно-механические свойства / Н.Н. Курилович, В.А. Шуляк, А.В. Евдокимов // *Зернові продукти і комбікорми.* – 2009. – №3 (35). – С. 14-17.

6 *Курилович Н.Н.* Уравнение механических состояний для описания деформационных процессов ферментативных сыров / Н.Н. Курилович, Т.И. Шингарева, С.В. Красноцкий // Вестник Могилевского государственного университета продовольствия. – 2010. – №2 (9). – С. 88-95.

7 *Беляев Н.М.* Сопротивление материалов / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 608с.

## **ТЕОРЕТИЧНА ОЦІНКА ГРАНИЧНОЇ В'ЯЗКОПЛАСТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ПРИ ДЕФОРМАЦІЇ ХАРЧОВИХ МАС**

Курилович М.М., Киркор М. О.

**Анотація** - запропонована формула для оцінки граничної в'язкопластичної деформації харчових мас за схемами старіння і течії. Формула отримана з рівнянь механічних станів, що описують умови виникнення в'язкопластичних деформацій і побудованих на підставі дослідів на короткочасну повзучість.

## **THEORETICAL ESTIMATES OF MARGINAL VISCO-PLASTIC DEFORMATION DURING THE DEFORMATION OF THE FOOD MASS**

N. Kurilovich, M. Kirkor

### *Summary*

**Proposed a formula for estimating the marginal visco-plastic deformation of the food masses by the schemes of aging and flow. The formula is derived from the equations of mechanical states describing the conditions for the occurrence of visco-plastic deformation and constructed on the basis of experiments on short-term creep.**