

УДК 621.225.001.4

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАСОСНОЙ СТАНЦИИ С ПРИВОДНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ

Панченко А. И., д.т.н., проф.,

Волошина А. А., к.т.н., доц.,

Панченко И. А., асп.

*Таврический государственный агротехнологический университет*

Тел. (0619) 42-04-42

***Аннотация*** – работа посвящена разработке математической модели рабочих процессов, происходящих в насосной станции с приводным двигателем, включающая в себя приводной двигатель внутреннего сгорания дизельного типа, нерегулируемый шестеренный насос и предохранительный клапан непрямого действия.

***Ключевые слова*** – математическая модель, рабочие процессы, насосная станция, приводной двигатель внутреннего сгорания дизельного типа, нерегулируемый шестеренный насос.

***Постановка проблемы.*** Повышение эффективности эксплуатации мобильной техники в настоящее время определяется степенью гидрофикации ее активных рабочих органов, а также рациональным выбором режимов работы элементов гидравлической системы и номенклатурой гидроагрегатов. Поэтому вопросы расчета, исследования и проектирования гидроагрегатов и их элементов, с учетом конструктивных особенностей и условий эксплуатации, заслуживают большого внимания.

Таким образом, разработка математических моделей рабочих процессов отдельных элементов и гидроагрегата в целом, на основе рационального выбора методов решения систем дифференциальных уравнений, описывающих динамику изменения выходных характеристик и геометрических параметров элементов, входящих в состав гидроагрегата является важной научной проблемой.

***Анализ последних исследований.*** Математическое описание гидромеханических и динамических процессов происходящих в элементах гидроагрегата в условиях эксплуатации, основано на известных общих уравнениях движения сплошной среды с использованием экспериментальных значений коэффициентов

гидравлических сопротивлений, расходов и гидродинамических сил [1]. Характерными для общих уравнений и зависимостей гидромеханики являются динамические процессы, при которых движение рабочих жидкостей будет неустановившимся, то есть в любой точке живого сечения потока давление, скорость и плотность рабочей жидкости зависят от времени, что вынуждает принимать квазистационарные значения коэффициентов количества движения, кинетической энергии, гидравлического сопротивления, состояния потока и т.д.

Анализ работ в области разработки гидроагрегатов для привода активных рабочих органов мобильной техники [2, 3] позволяет отметить, что до настоящего времени не имеется достаточно полных моделей, описывающих изменение выходных характеристик гидроагрегатов с приводными двигателями внутреннего сгорания и нерегулируемыми шестеренными насосами, которые позволили бы углубленно исследовать статические и динамические характеристики гидроагрегата и его элементов, при разработке методологии проектирования элементов и гидроагрегата в целом.

*Формулирование целей статьи (постановка задания).* Исследование рабочих процессов и их влияния на выходные характеристики гидроагрегата и его элементов путем разработки физической и математической моделей, учитывающих особенности функционирования и взаимное влияние элементов гидроагрегата, а также особенностей рабочей жидкости.

*Основная часть.* Математическое описание приводного двигателя, нерегулируемого шестеренного насоса, предохранительного клапана непрямого действия, а также рабочей жидкости, можно представить уравнениями расходов, моментов, перемещения подвижных элементов и неразрывности.

При разработке математических моделей рабочих процессов элементов гидроагрегата приняты следующие допущения: длина трубопроводов невелика; температура рабочей жидкости постоянная (т.е. постоянными считаются коэффициенты кинематической вязкости и силы трения); давление в сливной, всасывающей и дренажной магистралях равняется нулю; рабочие кромки гидроаппаратов считаются острыми; соединительные каналы большие по сечению и короткие по длине.

На основе принятых допущений разработана расчетная схема насосной станции мобильной машины с разомкнутой циркуляцией потока (рис. 1), включающая приводной двигатель внутреннего сгорания дизельного типа, нерегулируемый шестеренный насос и предохранительный клапан непрямого действия, на основании которой можно провести математическое описание каждого элемента,

входящего в насосную станцию.

Отличительной особенностью предлагаемой расчетной схемы является возможность дискретного рассмотрения всех элементов, входящих в насосную станцию с разомкнутой циркуляцией потока, а так же рабочей жидкости, как единого целого с учетом их взаимосвязей и взаимного влияния.

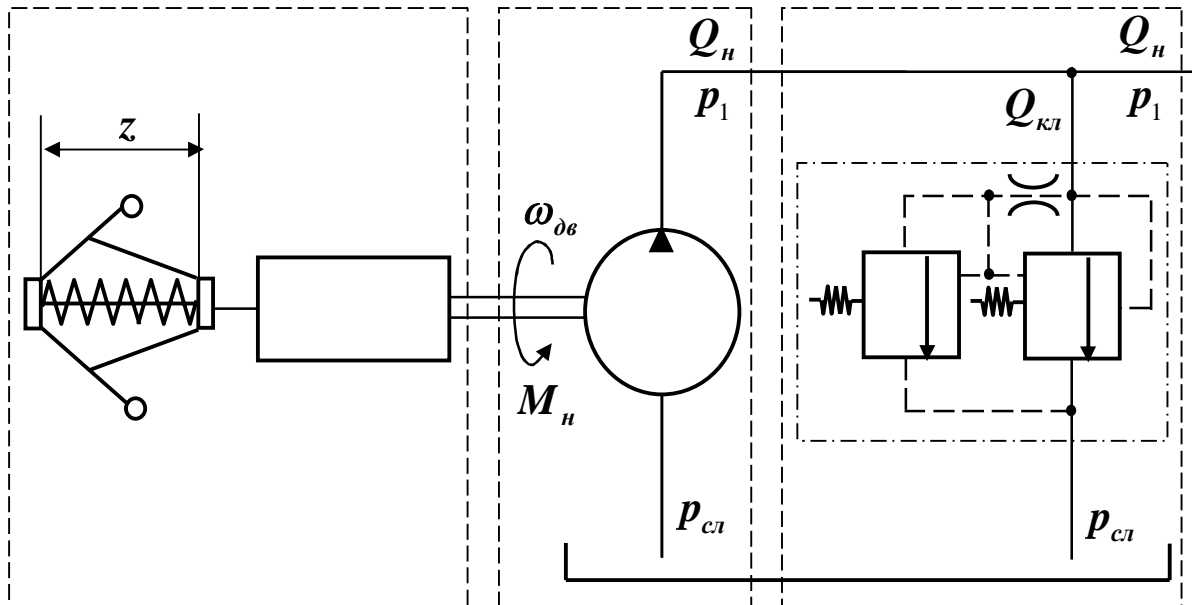


Рис. 1. Расчетная схема насосной станции с разомкнутой циркуляцией потока

**Приводной двигатель внутреннего сгорания.** В соответствии с учетом рекомендаций принятых в работах [4,5] и расчетной схемой (рис. 1), а так же принятыми выше допущениями математическая модель рабочих процессов приводного дизельного двигателя с центробежным регулятором для нерегулируемого шестеренного насоса описывается уравнением моментов на валу двигателя:

$$M_{\text{дв}}(\omega_{\text{дв}}) + M_z = M_n(t) + J \cdot \frac{d\omega_{\text{дв}}(t)}{dt} + k_{\text{д}} \cdot z_i(t), \quad (1)$$

где  $M_{\text{дв}}(\omega_{\text{дв}}) + M_z$  – крутящий момент двигателя по скоростной характеристике;

$M_n(t)$  – нагрузочный момент двигателя со стороны насоса;

$J$  – момент инерции приводного двигателя (приведенный) момент инерции;

$\omega_{\text{дв}}(t)$  – угловая скорость вала двигателя;

$k_{\text{д}}$  – параметр настройки центробежного регулятора двигателя;

$z_i(t)$  – текущее перемещение муфты регулятора.

Крутящий момент двигателя по скоростной характеристике  $M_{\text{дв}}(\omega_{\text{дв}}) + M_z$  можно представить в виде суммы минимального крутящего момента  $M_{\text{дв}}(\omega_{\text{дв}})$  и приращения  $M_z$ , обеспеченного минимальным ходом муфты регулятора, при этом приращение  $M_z$  близко к номинальному крутящему моменту приводного двигателя  $M_z \approx M_{\text{ен}}$ .

Общепринято [6], использование квадратичной зависимости эффективного крутящего момента  $M_e(n)$  и крутящего момента двигателя по скоростной характеристике  $M_{\text{дв}}(\omega_{\text{дв}}) + M_z$  при начальных условиях изменения угловой скорости вала двигателя  $\omega_{\text{min}} \leq \omega_{\text{дв}}(t) \leq \omega_n$ . Тогда, крутящий момент двигателя определяется зависимостью:

$$M_{\text{дв}}(\omega_{\text{дв}}) + M_z = M_{\text{ен}} \left( 0,87 + 1,13 \frac{\omega_{\text{дв}}(t)}{\omega_n} - \left( \frac{\omega_{\text{дв}}(t)}{\omega_n} \right)^2 \right), \quad (2)$$

где  $M_{\text{ен}}$  – номинальное значение эффективного крутящего момента  $M_e$  приводного двигателя.

Когда угловая скорость больше своего номинального значения и находится в диапазоне  $\omega_n < \omega_{\text{дв}}(t) \leq \omega_{\text{нач.рег}}$ , регулятор начинает снижать подачу топлива, однако в зоне нечувствительности регулятора крутящий момент практически равен номинальному значению эффективного крутящего момента приводного двигателя:

$$M_{\text{дв}}(\omega_{\text{дв}}) + M_z \approx M_{\text{ен}}. \quad (3)$$

Когда угловая скорость больше своего значения при начале регулирования и находится в диапазоне  $\omega_{\text{нач.рег}} \leq \omega_{\text{дв}}(t) \leq \omega_{\text{ххmax}}$ , крутящий момент снижается приблизительно по линейной зависимости:

$$M_{\text{дв}}(\omega_{\text{дв}}) + M_z = M_{\text{ен}} \left( 1 - \frac{\omega_{\text{дв}}(t) - \omega_{\text{нач.рег}}}{\omega_{\text{ххmax}} - \omega_{\text{нач.рег}}} \right), \quad (4)$$

где  $\omega_{\text{ххmax}}$  – максимальная угловая скорость коленчатого вала при холостом ходе двигателя.

Нагрузочный момент двигателя со стороны нерегулируемого шестеренного насоса определяется из выражения [2]:

$$M_n(t) = \frac{V_n \cdot p_1(t)}{2\pi \cdot \eta_{n,\text{мех}} \cdot u_{\text{дв}}}, \quad (5)$$

где  $V_n$  – рабочий объем нерегулируемого шестеренного насоса;

$p_1(t)$  – давления в нагнетательной магистрали гидроагрегата;

$\eta_{n,mex}$  – механический КПД нерегулируемого шестеренного насоса;

$u_{\delta\epsilon}$  – передаточное число согласующего редуктора между приводным двигателем и насосом.

Приведенный момент инерции  $J$  приводного двигателя определяется суммой моментов инерции:

$$J = J_{\delta\epsilon} + \frac{J_n}{u_{\delta\epsilon}^2}, \quad (6)$$

где  $J_{\delta\epsilon}$  и  $J_n$  – приведенные моменты инерции двигателя и насоса, соответственно.

Для приводных двигателей дизельного типа применяемых в мобильной технике, приведенный момент инерции двигателя  $J_{\delta\epsilon}$  можно считать равным:

$$J_{\delta\epsilon} = k_1 \cdot J_{max},$$

где  $k_1$  – коэффициент пропорциональности,  $k_1 = 1,05 \dots 1,33$ ;

$J_{max}$  – момент инерции маховика приводного двигателя,

$$J_{max} \approx \frac{m_{max} \cdot D_{max}^2}{4},$$

где  $m_{max}$  и  $D_{max}$  – максимальные масса и диаметр маховика приводного двигателя, соответственно.

Диаметр маховика приводного двигателя, согласно [7], определяется выражением

$$D_{max} \approx k_2 D_{ц},$$

где  $k_2$  – коэффициент пропорциональности,  $k_2 = 4 \pm 0,5$ ;

$D_{ц}$  – диаметр цилиндра приводного двигателя.

Подставив в (6) соответствующие значения, получим уравнение приведенного момента инерции приводного двигателя:

$$J = k_1 \cdot \frac{m_{max} \cdot k_2 D_{ц}^2}{4} + \frac{J_n}{u_{\delta\epsilon}^2}. \quad (7)$$

Согласно [8], величина  $k_d$  определяется отношением крутящего момента двигателя при произвольной угловой скорости  $\omega_{xx}$  характеристике  $M_{\delta\epsilon}(\omega_{\delta\epsilon}) + M_z$  к текущему максимальному

перемещению муфты регулятора  $z_{\max}(t)$ :

$$k_{\delta} = \frac{M_{\delta\delta}(\dot{\omega}_{xx}) + M_z}{z_{\max}(t)}. \quad (8)$$

Текущее перемещение муфты регулятора в диапазоне от нуля до максимального значения  $0 \leq z_i \leq z_{\max}$  определяется выражением:

$$\dot{z}_i(t) = \nu^{-1} \cdot \left[ (a + b \cdot z_i) \cdot \omega_{\delta\delta}^2(t) - C_z \cdot z_i(t) - F \right], \quad (9)$$

где  $\nu$  – коэффициент вязкого трения, согласно [8] этот коэффициент можно отождествить с величиной фактора торможения регулятора  $\mathfrak{G}$ ,  $\nu \approx \mathfrak{G}$ ;

где  $a$ ,  $b$  – постоянные настройки центробежного регулятора двигателя;

$C_z$  и  $F$  – жесткость и сила предварительного сжатия пружины регулятора соответственно.

Силу предварительного сжатия пружины регулятора в полном диапазоне регулирования можно определить как

$$F = F_{\max} \cdot \psi(t), \text{ при } 0 \leq \psi(t) \leq 1, \quad (10)$$

где  $F_{\max}$  и  $\psi(t)$  – максимальная сила предварительного сжатия пружины и параметр ее регулирования соответственно.

Решая уравнение (1) относительно  $\frac{d\omega_{\delta\delta}(t)}{dt}$ , получаем уравнение описывающее изменение угловой скорости вала приводного двигателя  $\omega_{\delta\delta}(t)$  во всем диапазоне от  $\omega_{\min}$  до  $\omega_{xx\max}$

$$\frac{d\omega_{\delta\delta}(t)}{dt} = \frac{1}{J} \left[ M_{\delta\delta}(\omega_{\delta\delta}) + M_z - M_n(t) - k_{\delta} \cdot z_i(t) \right]. \quad (11)$$

Полученные уравнения (1...11) позволяют описать динамику изменения параметров приводного двигателя дизельного типа (с регулятором) насосной установки с разомкнутой циркуляцией потока рабочей жидкости.

**Нерегулируемый шестеренный насос.** Анализ гидроагрегатов привода активных рабочих органов мобильной техники показывает, что в качестве насоса в большинстве случаев используют нерегулируемый шестеренный насос.

В математическую модель рабочих процессов шестеренного нерегулируемого насоса входят уравнение (5) моментов на валу насоса  $M_n$  и уравнение неразрывности потока рабочей жидкости (расходов насоса). На рис. 2 представлена схема расходов насоса [3]

на основани которой можно записать уравнение подачи насоса:

$$Q_n(t) = Q_{н.г}(t) - Q_{н.к}(t) - Q_{н.н}(t) - Q_{н.д}(t) - Q_{н.у}(t), \quad (12)$$

где  $Q_{н.г}(t) = \frac{V_n}{2\pi} \cdot \omega_n(t)$  – геометрическая подача насоса, (13)

$$\frac{V_n}{2\pi} = W_n - \text{характерный объем насоса,}$$

где  $V_n$  – рабочий объем нерегулируемого шестеренного насоса определяется зависимостью [9]:

$$V_n = 0,5 \pi \cdot b \cdot \left( D_e^2 - d^2 - \frac{t_0^2}{3} \right),$$

где  $b$  – ширина шестерен;

$D_e$  – наружный диаметр шестерен;

$d$  – диаметр начальной окружности шестерни;

$t_0$  – шаг зацепления.

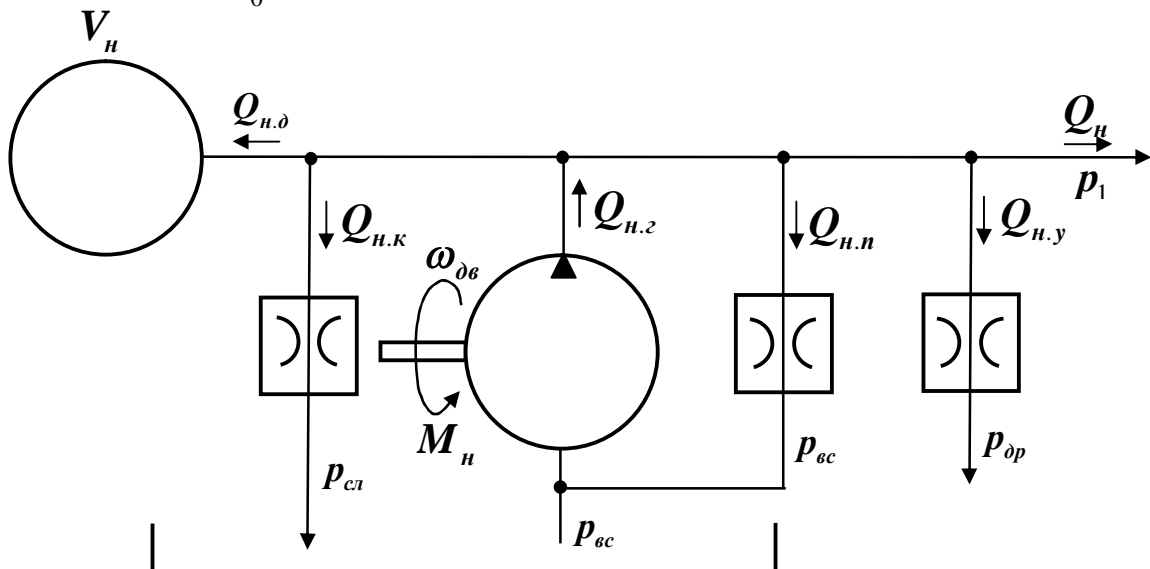


Рис. 2. Схема расходов нерегулируемого шестеренного насоса

Базовой моделью торцевых радиально направленных утечек для шестеренного насоса является выражение, полученное в работах [10,11] для случая двух колец, сопрягающихся своими торцами, одно из которых вращается с постоянной угловой скоростью

$$Q_{н.у}(t) = \left[ p_1(t) - p_{др} - \frac{3\rho \cdot \omega_{дв}^2}{20} (R^2 - r^2) \right] \cdot \frac{2\pi \cdot \delta^3}{12\mu \cdot \ln \frac{R}{r}}, \quad (14)$$

где  $p_1(t)$  – давление нагнетания;

$p_{др}$  – давление в дренажной системе;

$\frac{3\rho \cdot \omega_{\delta\delta}^2}{20} \cdot (R^2 - r^2)$  – центробежная составляющая,

препятствующая торцевым утечкам;

$\rho$  – плотность рабочей жидкости;

$R$  – внешний радиус кольца;

$r$  – внутренний радиус кольца;

$\delta$  – величина радиального зазора;

$\mu$  – динамическая вязкость.

Математическая модель перетечек шестеренного насоса через радиальный зазор имеет вид [12]:

$$Q_{н.н}(t) = b \cdot \left( \frac{1}{8\mu} \cdot \frac{p_1(t) - p_{вс}}{\Delta\tau} \cdot A_1 - \pi \cdot R_{в.ш}^2 \cdot B_1 \right). \quad (15)$$

где  $\Delta\tau$  – угол поворота ведущей шестерни

$$A_1 = R_k^2 - R_{в.ш}^2 - \frac{4R_k^2 \cdot R_{в.ш}^2}{R_k^2 - R_{в.ш}^2} \cdot \ln^2 \frac{R_k}{R_{в.ш}},$$

$$B_1 = \frac{2R_k^2}{R_k^2 - R_{в.ш}^2} \cdot \ln \frac{R_k}{R_{в.ш}} - 1.$$

где  $R_{в.ш}$  – радиус ведущей шестерни;

$R_k$  – радиус корпуса.

Расход  $Q_{н.к}(t)$ , вызванный компрессией и декомпрессией рабочей жидкости, определяется из выражения [3,13]:

$$Q_{н.к}(t) = C_n \cdot [p_1(t) - p_{сл}] \frac{\omega_n(t)}{E_{ж}}, \quad (16)$$

где  $C_n = \frac{(2W_{н.м} + W_n)}{2}$  – коэффициент пропорциональности,

$W_{н.м} = \frac{V_{н.м}}{2\pi}$  – характерный «мертвый» объем насоса,

$V_{н.м}$  – «мертвый объем».

Объемный модуль упругости двухфазной рабочей жидкости определяется выражением [14]:

$$E_{жс} = K(p_1 + 1) \cdot (Ap_1 + B) \cdot \frac{(1 - m_0) \cdot D_1 + m_0 \cdot D_2}{K(p_1 + 1) \cdot (1 - m_0) \cdot D_1 + m_0 (Ap_1 + B) \cdot D_2}, \quad (17)$$



$$\text{где } D_1 = \sqrt[A]{\frac{Ap_0 + B}{Ap_1 + B}}, \quad D_2 = \sqrt[K]{\frac{p_0 + 1}{p_1 + 1}};$$

$K$  – показатель политропы;

$A$  и  $B$  – параметры рабочей жидкости, зависящие от типа масла и рабочей температуры системы;

$m_0$  – содержание нерастворенного воздуха в рабочей жидкости в относительных единицах.

Деформационный расход  $Q_{н.д}(t)$  в насосе, обусловленный сжатием рабочей жидкости, определяется из выражения:

$$Q_{н.д}(t) = \frac{V_{н.д}}{E_{жс}} \frac{dp_1(t)}{dt},$$

где  $V_{н.д} = 0,5 \cdot \left( 0,5 \pi \cdot b \cdot \left( D_e^2 - d^2 - \frac{t_0^2}{3} \right) + V_{н.м} \right)$  – объем рабочей жидкости в нагнетательной полости насоса.

$$Q_{н.д}(t) = \frac{\left( 0,5 \pi \cdot b \cdot \left( D_e^2 - d^2 - \frac{t_0^2}{3} \right) + V_{н.м} \right) dp_1(t)}{2 \cdot E_{жс} dt}. \quad (18)$$

Подача рабочей жидкости на выходе насоса с учетом выражений всех составляющих равна

$$Q_n(t) = \frac{0,5 \pi \cdot b \cdot \left( D_e^2 - d^2 - \frac{t_0^2}{3} \right)}{2\pi} \cdot \omega_n(t) \cdot e - \left[ p_1(t) - p_{dp} - \frac{3\rho \cdot \omega_{дв}^2}{20} (R^2 - r^2) \right] \times$$

$$\times \frac{2\pi \cdot \delta^3}{12\mu \cdot \ln \frac{R}{r}} - b \cdot \left( \frac{1}{8\mu} \cdot \frac{p_1(t) - p_{вс}}{\Delta\tau} \cdot A_1 - \pi \cdot R_m^2 \cdot B_1 \right) - C_n \cdot \frac{\omega_n(t)}{E_{жс}} \cdot [p_1(t) - p_{сг}] -$$

$$\frac{\left( 0,5 \pi \cdot b \cdot \left( D_e^2 - d^2 - \frac{t_0^2}{3} \right) + V_{н.м} \right) dp_1(t)}{2 \cdot E_{жс} dt}. \quad (19)$$

Полученные уравнения (12...19), описывают динамику изменения подачи нерегулируемого шестеренного насоса  $Q_n(t)$  насосной установки с разомкнутой циркуляцией потока.

**Предохранительный клапан непрямого действия.**  
Представленная расчетная схема (физическая модель)

предохранительного клапана непрямого действия (рис. 3) позволяет разработать математическую модель рабочих процессов клапана, описывающую его принцип действия [15].

Исследуемый клапан состоит из двух золотников – исполнительного и управляющего. С целью идентификации расчетных элементов математической модели примем, что оба золотника плунжерного типа (рис. 3).

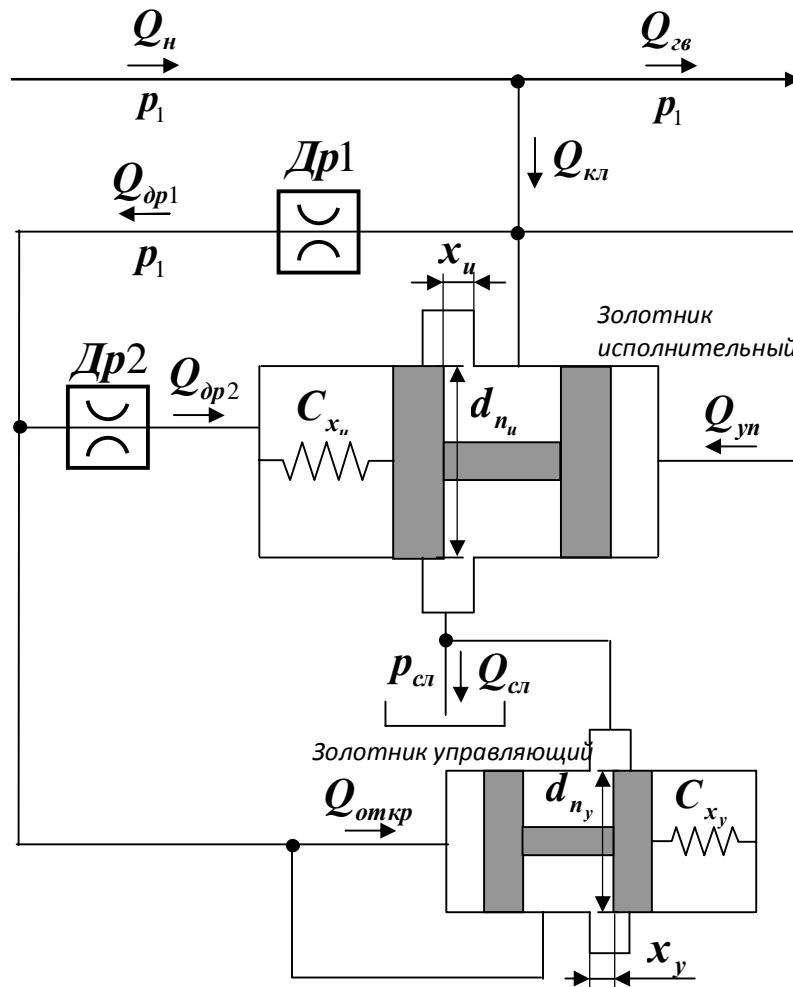


Рис. 3. Расчетная схема предохранительного клапана

Текущий расход через открытый предохранительный клапан можно определить как сумму текущих расходов через исполнительный и управляющий золотники

$$Q_{кл}(t) = Q_{кл_u}(t) + Q_{кл_y}(t).$$

Текущий расход через исполнительный золотник определяется выражением:

$$Q_{кл_u}(t) = \mu' \cdot S_u(t) \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho} [p_1(t) - p_{сл}]}, \quad (20)$$

где  $\mu'$  – коэффициент расхода зависящий от формы исполнительного золотника;

$S_u(t)$  – текущая площадь раскрытия исполнительного золотника

$$S_u(t) = \pi \cdot d_{n_u} \cdot x_u(t),$$

где  $d_{n_u}$  – диаметр плунжера исполнительного золотника;

$x_u(t)$  – текущее перемещение плунжера исполнительного золотника от его закрытого положения.

Аналогично определяется расход через управляющий золотник:

$$Q_{к\lambda_y}(t) = \mu \cdot \pi \cdot d_{n_y} \cdot x_y(t) \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho} [p_{dp1}(t) - p_{cl}]}, \quad (21)$$

где  $d_{n_y}$  – диаметр плунжера управляющего золотника;

$x_y(t)$  – текущее перемещение плунжера управляющего золотника от его закрытого положения.

Деформационный расход трубопроводов, на участке насос-клапан-гидромотор, зависящий от сжимаемости рабочей жидкости, определяется из выражения [3]:

$$Q_{сж}(t) = \frac{V_{mp}}{E_{жс}} \frac{dp_{нагн}}{dt}, \quad (22)$$

где  $V_{mp}$  – объем рабочей жидкости в трубопроводах, на участке насос-клапан-гидромотор.

Расход через демпфирующий дроссель управляющего золотника  $Др1$  определяется выражением:

$$Q_{dp1}(t) = K_{dp1} \cdot [p_{dp1}(t) - p_{cl}], \quad (23)$$

где  $K_{dp1}$  – проводимость дросселя управляющего золотника  $Др1$ . При ламинарном течении рабочей жидкости в дросселе

$$K_{dp1} = \frac{\pi \cdot d_{dp1}^4}{128 \mu' \cdot l_1},$$

где  $d_{dp1}$  – диаметр дроссельного отверстия управляющего золотника;

$l_1$  – длина дросселя управляющего золотника.

Расход через демпфирующий дроссель исполнительного золотника  $Др2$  определяется аналогично

$$Q_{dp2}(t) = \frac{\pi \cdot d_{dp2}^4}{128 \mu' \cdot l_2} \cdot [p_{dp2}(t) - p_{cl}], \quad (24)$$

где  $d_{dp_2}$  – диаметр дроссельного отверстия управляющего золотника;

$l_2$  – длина дросселя управляющего золотника.

Расход, необходимый для срабатывания управляющего золотника, определяется из выражения:

$$Q_{yn_y}(t) = S_{nly} \frac{dx_y}{dt},$$

где  $S_{nly}$  – эффективная площадь плунжера управляющего золотника.

При малом объеме демпфирующей полости можно пренебречь сжимаемостью рабочей жидкости в этом объеме. Тогда расход дросселя  $Dp1$  можно записать в виде:

$$Q_{dp1}(t) = S_{nly} \frac{dx_y}{dt}.$$

Из равенства расходов  $Q_{yn_y}(t)$  и  $Q_{dp1}(t)$ , получаем:

$$K_{dp1} \cdot [p_{dp1}(t) - p_{cl}] = S_{nly} \frac{dx_y}{dt}.$$

Тогда, при  $p_{cl} = 0$

$$K_{dp1} \cdot p_{dp1}(t) = S_{nly} \frac{dx_y}{dt}.$$

Откуда

$$p_{dp1}(t) = \frac{S_{nly}}{K_{dp1}} \frac{dx_u}{dt}.$$

Аналогично определяется расход, необходимый для срабатывания исполнительного золотника, из выражения:

$$Q_{yn_u}(t) = S_{nlu} \frac{dx_u}{dt},$$

где  $S_{nlu}$  – эффективная площадь плунжера исполнительного золотника.

Тогда

$$K_{dp2} \cdot [p_{dp2}(t) - p_{cl}] = S_{nlu} \frac{dx_u}{dt},$$

при  $p_{cl} = 0$

$$K_{dp2} \cdot p_{dp2}(t) = S_{nlu} \frac{dx_u}{dt}.$$

Откуда

$$p_{dp2}(t) = \frac{S_{нл_u} dx}{K_{dp2} dt}.$$

Неразрывность расходов на участке насос – клапан – гидромотор при открытом предохранительном клапане:

$$Q_n(t) = Q_{зм}(t) + Q_{кл}(t) + Q_{сжс}(t) + Q_{yn_y}(t) + Q_{yn_u}(t). \quad (25)$$

Уравнение движения плунжера управляющего золотника в процессе работы имеет вид [15]:

$$m_y \frac{d^2 x_y(t)}{dt^2} = S_{нл_y} \cdot [p_1(t) - p_{dp1}(t)] - F_{np_y}(t) - F_{z\partial_y}(t) - F_{mp_y}, \quad (26)$$

где  $m_y$  – масса плунжера управляющего золотника;

$$F_{np_y}(t) = C_{x_y} \cdot [x_y(t) + x_{z_y}] - \text{сила пружины управляющего золотника,}$$

где  $x_{z_y}$  – величина предварительного сжатия пружины управляющего золотника;

$C_{x_y}$  – жесткость пружины управляющего золотника

$F_{z\partial_y}(t)$  – гидродинамическая сила, действующая на плунжер управляющего золотника,

$$F_{z\partial_y}(t) = 2\mu^2 \cdot \pi \cdot d_{n_y} \cdot x_y(t) \cdot p_1(t) \cdot \cos\theta, \quad (27)$$

где  $\theta$  – угол между вектором скорости потока, проходящего через щель, и осью плунжера;

$$F_{mp_y} = F_{mp0} \cdot \text{sign} \frac{dx_y}{dt} - \text{сила трения в плунжере}$$

управляющего золотника, где  $F_{mp0}$  – модуль силы трения,

$$\text{sign} \frac{dx_y}{dt} = \begin{cases} +1 & \text{при } \frac{dx_y}{dt} > 0 \\ -1 & \text{при } \frac{dx_y}{dt} < 0 \end{cases}.$$

Движения плунжера исполнительного золотника в процессе работы описывается аналогичным уравнением:

$$m_u \frac{d^2 x_u(t)}{dt^2} = S_{нл_u} \cdot [p_1(t) - p_{dp2}(t)] - F_{np_u}(t) - F_{z\partial_u}(t) - F_{mp_u}, \quad (28)$$

где  $m_u$  – масса плунжера исполнительного золотника;

$$F_{np_u}(t) = C_{x_u} \cdot [x_u(t) + x_{z_u}] - \text{сила пружины исполнительного золотника,}$$

где  $x_{z_u}$  – величина предварительного сжатия пружины исполнительного золотника;

$C_{x_u}$  – жесткость пружины исполнительного золотника

$F_{z_{\partial_u}}(t)$  – гидродинамическая сила, действующая на плунжер исполнительного золотника,

$$F_{z_{\partial_u}}(t) = 2\mu^2 \cdot \pi \cdot d_{n_u} \cdot x_u(t) \cdot p_{\text{оп1}}(t) \cdot \cos \theta, \quad (29)$$

$F_{mp_u} = F_{mp0} \cdot \text{sign} \frac{dx_u}{dt}$  – сила трения в плунжере исполнительного золотника,

$$\text{sign} \frac{dx_u}{dt} = \begin{cases} +1 & \text{при } \frac{dx_u}{dt} > 0 \\ -1 & \text{при } \frac{dx_u}{dt} < 0 \end{cases}.$$

Остановимся на ограничениях движения плунжеров предохранительного клапана, определяемых конструкцией и физикой их функционирования. Так как ход плунжеров ограничен корпусом предохранительного клапана, то их перемещение определяется неравенством:

$$0 \leq x_u \leq x_{\max_u} - \text{для исполнительного золотника,}$$

$$0 \leq x_y \leq x_{\max_y} - \text{для управляющего золотника.}$$

В модели следует учесть, что величина открытия щели золотников предохранительного клапана не может быть отрицательной

$$x_{ш_u} = x - x_{0_u} \geq 0 - \text{для исполнительного золотника,}$$

$$x_{ш_y} = x - x_{0_y} \geq 0 - \text{для управляющего золотника.}$$

Ограничения на скорость перемещения плунжеров предохранительного клапана, связанные с конечным интервалом их хода и определяются соответствующими неравенствами: для исполнительного золотника

$$\dot{x}_u = \begin{cases} 0 & \text{при } \dot{x}_u > 0, \quad x_u = x_{\max_u}, \\ 0 & \text{при } \dot{x}_u < 0, \quad x_u = 0, \\ \dot{x}_u & \text{при } 0 < x_u < x_{\max_u}. \end{cases}, \quad (30)$$

для управляющего золотника

$$\dot{x}_y = \begin{cases} 0 & \text{при } \dot{x}_y > 0, \quad x_y = x_{\max_y}, \\ 0 & \text{при } \dot{x}_y < 0, \quad x_y = 0, \\ \dot{x}_y & \text{при } 0 < x_y < x_{\max_y}. \end{cases}. \quad (31)$$

Представленная математическая модель (20...31) является нелинейной ввиду нелинейности уравнений (20), (27...31). Если систему уравнений (20...31) решить относительно одной переменной, то получим нелинейное дифференциальное уравнение 3-го порядка. Для получения единственного решения уравнения 3-го порядка или системы уравнений (20...31) необходимо иметь 3 начальных условия, которыми для исследуемой системы являются [15]:  $x_u(0)$ ,  $x_y(0)$ ,  $\dot{x}_u(0) = 0$ ,  $\dot{x}_y(0) = 0$  и  $p_1(0)$ .

*Выводы.* В результате выполненных исследований разработана математическая модель рабочих процессов насосной станции с приводным двигателем, включающая уравнения расходов и неразрывности потока на основе системного подхода, где гидроустройства (включая рабочую жидкость) рассматриваются во взаимосвязи, как единое целое. Математическая модель представляет собой систему дифференциальных, алгебраических, трансцендентных уравнений и неравенств, учитывает нелинейности, ограничения и погрешности моделируемых элементов, соответствующие физике их функционирования.

Литература:

1. Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем: Учебник для вузов по специальностям «Гидропневмоавтоматика и гидропривод» и «Гидравлические машины и средства автоматизации». – 2-е изд., перераб. и доп. /Д.Н. Попов. – М.: Машиностроение, 1987. – 464 с.
2. Башта Т.М. Гидравлика, гидромашины, гидроприводы: Учебник для ВТУЗов / Т.М. Башта, С.С. Руднев, Б.Б. Некрасов и др. – М.: Машиностроение, 1982. – 423с.: ил.
3. Панченко А.І. Математична модель гідроагрегату для приводу активних робочих органів мобільної сільськогосподарської техніки //

*А.І.Панченко, А.А.Волошина, Д.С.Тітов* / Праці ТДАТА. – Мелітополь, 2006. – Вип. 37. – С. 53-66.

4. *Бажин И.И.* Автоматизированное проектирование машиностроительного гидропривода / *И.И. Бажин, Ю.Г. Беренгард, М.М. Гайцгори и др.*; Под общей ред. *С.А. Ермакова.* – М.: Машиностроение, 1988. – 312 с.

5. Прикладная и инженерная математика [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.simumath.net/library/book.html>.

6. *Мальшев В.С.* Автомобильные двигатели / *В.С.Мальшев, А.А. Бабошин.* – Мурманск: МГТУ, 2008. – 78 с.

7. *Кислов В.И.* Конструирование и производство топливной аппаратуры тракторных дизелей / *В.И. Кислов и др.* – М.: Машиностроение, 1972. – 302 с.

8. *Горелик Г.Б.* Двигатели внутреннего сгорания: теория автоматического регулирования // Учебное пособие / *Г.Б.Горелик.* – Тихоокеанский государственный университет, 2010. – 144 с.

9. *Юдин Е.М.* Шестеренные насосы / *Е.М. Юдин.* – М.: Машиностроение, 1964. – 236 с.

10. *Осипов А.Ф.* Объемные гидравлические машины коловратного типа: теория, конструкция, проектирование / *А.Ф. Осипов* – М.: Машиностроение, 1971. – 208 с.

11. *Осипов А.Ф.* Объемные гидравлические машины: основы теории и расчет гидродинамических и тепловых процессов / *А.Ф. Осипов.* – М.: Машиностроение, 1966. – 160 с.

12. *Матвиенко А.А.* Усовершенствование физических и математических моделей реальных процессов объемных утечек в шестеренных насосах: Дис. ... канд. техн. наук: 05.05.17 / *А.А.Матвиенко* – Кировоград, 2012. – 180 с.

13. *Черный Ю.И.* Винницкие гидронасосы // *Ю.И. Черныйи др.* /Сельский механизатор, 2000. –№5. – С. 24-25.

14. *Прокофьев В.Н.* Аксиально-поршневой регулируемый гидропривод / *В.Н. Прокофьев, Ю.А. Данилов, П.А. Кондаков и др.* – М.: Машиностроение, 1969. – 312 с.

15. *Волошина А.А.* Математическая модель предохранительного клапана непрямого действия // *А.А. Волошина* / Праці ТДАТУ. – Мелітополь, 2012. – Вип. 12. – Т.4. – С. 230-239.



## **МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НАСОСНОЇ СТАНЦІЇ З ПРИВОДНИМ ДВИГУНОМ**

Панченко А.І., Волошина А.А., Панченко І.А.

*Анотація* - робота присвячена розробці математичної моделі робочих процесів, що відбуваються в насосній станції з приводним двигуном, яка включає в себе приводний двигун внутрішнього згоряння дизельного типу, нерегульований шестерневий насос і запобіжний клапан непрямої дії.

## **MATHEMATICAL MODEL OF PUMP STATION WITH THE DRIVING MOTOR**

A.Panchenko, A.Voloshina, I. Panchenko.

### *Summary*

The article is dedicated to the development of mathematical model of working processes that take place in the pump station with the driving motor including a driving internal combustion engine of the diesel type, non-adjustable gear pump and indirect action relief valve.