

УДК 631.3 (075.8)

АНАЛІЗ ДИНАМІЧНОЇ УСТАЛЕНОСТІ ВІБРОПЛУГА У ГОРИЗОНТАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ

Ловейкін В. С., д. т. н.,

Човнюк Ю. В., к. т. н.,

Дяченко Л. А., інженер*.

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Тел. (044) 527-82-99

Анотація – проведений аналіз динамічної усталеності вібропуга у горизонтальній площині. Створено математичну модель руху вібропуга. Визначено основні закономірності, залежності робочих параметрів конструкції у режимах холостого ходу вібропуга та його реальної експлуатації.

Ключові слова – математична модель, вібропуг, в'язке тертя, фазовий портрет, автоколивання

Постановка проблеми. Відомо [1], що динамічна усталеність – це стійкість руху (вібро-) пуга, при якому мале збурення не збільшує розходження між визначеними параметрами збурюючого і робочого вихідного руху.

У відповідності з теоретичними уявленнями [1 – 26] (вібро-) пуг завжди асимптотично стійкий, але практично при його русі можливі недопустимі відхилення від рівноважного положення. При подібних значних відхиленнях змінюються ширина захвату пуга і умови його роботи, внаслідок чого погіршується якість оранки і підвищується тяговий опір. Допуски на параметри руху (вібропуга) пуга визначаються агротехнічними вимогами.

Диференціальне рівняння руху (вібро-) пуга є нелінійним, тому воно не може бути розв'язане у елементарних функціях [1]. Зазвичай розглядають випадки, коли пуг здійснює малі коливання навколо рівноважного положення. Проте такий підхід не дає змогу чітко визначити параметри (вібро-) пуга при його взаємодії з оброблюваним ґрунтом і не придатний для систем точного землеробства, які зараз широко застосовуються в Україні.

Аналіз літературних джерел по темі дослідження. У роботах [1 – 26] розглядаються малі коливання навколо рівноважного положення (вібро-) пуга і зроблена ціла низка припущень, які спрощують

математичну модель його руху й зводять останню до лінеаризованої. Такий спрощений підхід не дозволяє розглядати можливі у (вібро-) плугові автоколивання. Крім того, не враховується в'язке зовнішнє тертя, яке неминуче присутнє у процесі руху (вібро-) плуга та його взаємодії з ґрунтом. Використовуючи результати робіт [27 – 32] можна визначити основні параметри автоколивань (вібро-) плуга та разом з тим врахувати в'язке зовнішнє тертя останнього з ґрунтом, не застосовуючи, при цьому процедуру лінеаризації. Зрозуміло, що такий підхід дасть змогу якісно підвищити й уточнити існуючі інженерні методи розрахунку подібних систем і можливості застосування подібних розрахунків у системах точного землеробства.

Мета даної роботи полягає у встановленні основних робочих параметрів (вібро-) плуга у горизонтальній площині за наявності сил в'язкого тертя та наступному аналізі динамічної усталеності такої конструкції. При досягненні мети даної роботи необхідно створити адекватну математичну модель руху (вібро-) плуга та визначити основні закономірності, залежності робочих параметрів конструкції у режимах холостого ходу (вібро-) плуга та його реальної експлуатації. При цьому будуть використані результати робіт [27 – 32] без лінеаризації диференціальних рівнянь руху (вібро-) плуга, що суттєво підвищує точність відповідних інженерних розрахунків його робочих режимів та дає змогу використати останні у розробці систем точного землеробства.

Виклад основного змісту роботи.

Диференціальне рівняння руху (вібро-) плуга у холостому режимі його роботи.

Нехай плуг приведений у рух збуджуючими силами. Положення плуга відносно координатних осей, незмінно пов'язаних з трактором, визначаються з урахуванням прийнятих у [1] припущень: кутом повороту φ у горизонтальній площині, яка паралельна поверхні поля.

Припустимо, що модуль нормальної складової N_1 реакції польових дощок не залежить від відносної швидкості руху ґрунту, а напрямок її протилежний напрямку окружної швидкості польових дощок, яка виникає при переміщенні плуга в горизонтальній площині навколо точки O (рис. 1) і змінює знак разом зі швидкістю.

Щоб одержати математичні залежності, що виражають рівновагу плуга, розглянемо рух плуга з накладеними на нього в'язями (рис. 1): перша в'язь в горизонтальній площині $x^2 + y^2 = C_1$, друга в'язь у вертикальній площині $z = C_2$.

Зовнішніми силами, що діють на плуг при повільному русі, є сила тяги \vec{P} , вага плуга \vec{G} , гвинтовий опір ґрунту з головним вектором \vec{R} і головним моментом \vec{M} , реакція польових дощок з головним

вектором \vec{R}_1 і головним моментом \vec{M}_1 , а також реакція колісного ходу плуга \vec{R}_2 , яка відхилена від напрямку руху плуга на кут:

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} + \arctg f_2, \quad (1)$$

де f_2 – коефіцієнт тертя колісного ходу об ґрунт.

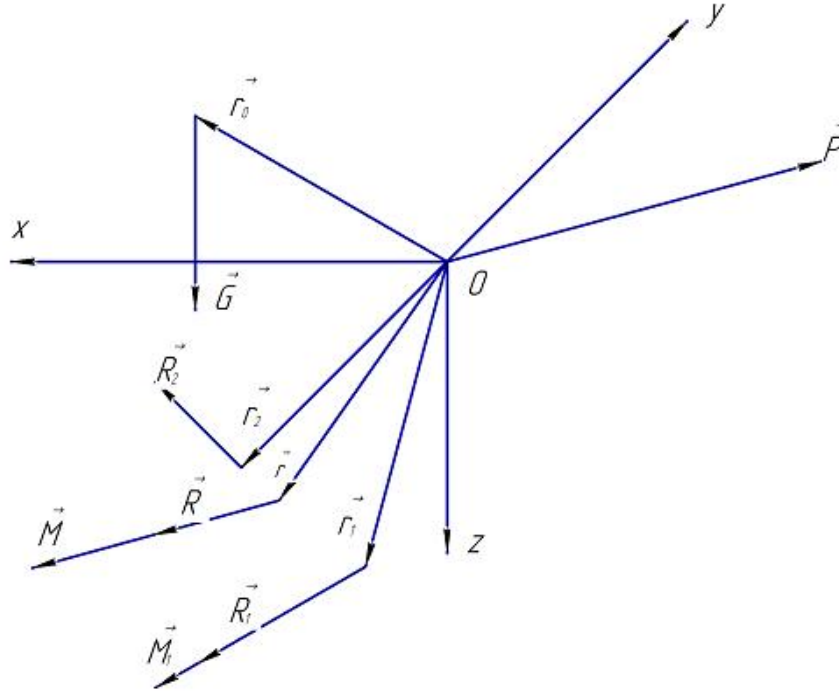


Рис. 1. Сили, що діють на плуг, який вільно зчеплений з трактором [1].

Модуль і напрямок сили тяги \vec{D} для усталеного руху плуга можна визначити з векторного рівняння:

$$\vec{P} + \vec{G} + \vec{R} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 0, \quad (2)$$

При заданих координатах (x, y, z) ; (x_1, y_1, z_1) ; (x_2, y_2, z_2) ; (x_0, y_0, z_0) точок, в яких прикладені сили \vec{R} , \vec{R}_1 , \vec{R}_2 , \vec{G} і припущення:

$$\vec{R}_1 = \vec{N}_1 + f_1 \cdot N_1 \cdot \vec{\tau}, \quad (3)$$

$$\vec{R}_2 = \vec{N}_2 + f_2 \cdot N_2 \cdot \vec{\tau}; \quad (4)$$

де \vec{N}_1 , \vec{N}_2 – нормальні складові реакцій \vec{R}_1 й \vec{R}_2 ,

$\vec{\tau}$ – орт дотичної складової реакцій \vec{R}_1 й \vec{R}_2 ,

f_1 – коефіцієнт тертя ковзання польових дощок об ґрунт, значення

\vec{N}_1 й \vec{N}_2 можна знайти у результаті проектування на вісі Ox ,

Oy , Oz векторного рівняння:

$$[\vec{r} \times \vec{R}] + [\vec{r}_1 \times \vec{R}_1] + [\vec{r}_2 \times \vec{R}_2] + [\vec{r}_0 \times \vec{G}] + \vec{M} = 0. \quad (5)$$

У результаті вказаного проектування матимемо:

$$\begin{cases} y \cdot R_x - z \cdot R_y + z_1 \cdot N_1 - y_2 \cdot N_2 + y_0 \cdot G + M_x = 0; & (6) \\ z \cdot R_x - x \cdot R_z + z_1 \cdot f \cdot N_1 + (x_2 + z_2 \cdot f_2) \cdot N_2 - x_0 \cdot G + M_y = 0; & (7) \\ x \cdot R_y - y \cdot R_x - (x_1 + y_1 \cdot f_1) \cdot N_1 - y_2 \cdot f_2 \cdot N_2 + M_z = 0; & (8) \end{cases}$$

Розв'язавши систему (6) – (8) відносно N_1 , N_2 знайдемо:

$$N_1 = \frac{x \cdot R_y - y \cdot R_x - (y \cdot R_z - z \cdot R_y + y_0 \cdot G + M_z) \cdot f_2 + M_z}{x_1 + y_1 \cdot f_1 + z_1 \cdot f_2}; \quad (9)$$

$$N_2 = \frac{z \cdot R_x - x \cdot R_z + z_1 \cdot f_1 \cdot N_1 - x_0 \cdot G + M_y}{x_2 + z_2 \cdot f_2}. \quad (10)$$

Для складання диференціального рівняння руху плуга використаємо теорему про кінетичний момент системи:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0, \quad (11)$$

де \vec{L}_0 – кінетичний момент плуга відносно точки O ;

\vec{M}_0 – головний момент всіх зовнішніх сил, що діють на плуг, відносно тієї ж точки.

Підставивши \vec{L}_0 і \vec{M}_0 в (11) і спроектувавши рівняння на осі системи координат $O \ x \ y \ z$, одержимо:

$$\ddot{\varphi} + \frac{l \cdot F_x}{I} \cdot \sin \varphi + \frac{l \cdot N_1}{I} \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}) = 0, \quad (12)$$

де F_x – тяговий опір плуга;

l – відстань точки зустрічі тягового опору із робочим органом плуга від точки O ;

I – момент інерції мас плуга відносно Oz .

У рівнянні (12) не врахована сила дії в'язкого (зовнішнього) тертя, яка зазвичай пропорціональна $l\dot{\varphi}$. Введемо її у модельне рівняння (12), використовуючи феноменологічний підхід. Тоді замість (12) матимемо:

$$\ddot{\varphi} + \frac{l \cdot F_x}{I} \cdot \sin \varphi + \frac{2 \cdot h \cdot l \cdot \dot{\varphi}}{I} + \frac{l \cdot N_1}{I} \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}) = 0, \quad (13)$$

де $2 \cdot h$ – коефіцієнт в'язкого тертя ґрунту.

Якщо плуг здійснює малі коливання навколо рівноважного положення, то $\sin \varphi \approx \varphi$ й (13) трансформується у наступне рівняння:

$$\ddot{\varphi} + \frac{l \cdot F_x}{I} \cdot \varphi + \frac{2 \cdot h \cdot l \cdot \dot{\varphi}}{I} + \frac{l \cdot N_1}{I} \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}) = 0, \quad (14)$$

Рівняння (12) – (14) відповідають режиму холостого ходу віброплуга, оскільки у правій їх частині стоїть нуль. Якщо врахувати вимушену силу, прикладену до віброплуга у режимі його реальної експлуатації, то вказані рівняння стануть неоднорідними:

$$\ddot{\varphi} + \frac{l \cdot F_x}{I} \cdot \sin \varphi + \frac{l \cdot N_1}{I} \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}) = \frac{l \cdot Q \cdot \cos(\omega t + \alpha_0)}{I}, \quad (12^*)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{l \cdot F_x}{I} \cdot \sin \varphi + \frac{2 \cdot h \cdot l \cdot \dot{\varphi}}{I} + \frac{l \cdot N_1}{I} \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}) = \frac{l \cdot Q \cdot \cos(\omega t + \alpha_0)}{I}, \quad (13^*)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{l \cdot F_x}{I} \cdot \varphi + \frac{2 \cdot h \cdot l \cdot \dot{\varphi}}{I} + \frac{l \cdot N_1}{I} \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}) = \frac{l \cdot Q \cdot \cos(\omega t + \alpha_0)}{I}, \quad (14^*)$$

де ω – кругова частота;

Q – амплітуда;

α_0 – початкова фаза вимушеної гармонічної сили;

t – час.

Режими функціонування плуга.

Рівняння (6) – (8) записані у результаті проектування векторного рівняння (5) на координатні осі системи координат $O \ x \ y \ z$ з урахуванням того, що координати точок прикладання сил і напрямки їх проєкцій на ці осі позитивні, а напрямки нормальних складових N_1 і N_2 реакцій стінки борозни і опорної поверхні поля відповідно паралельні осям $O \ y$ та $O \ z$ і негативні. Якщо задані сили N_1 і N_2 , то співвідношення (6) – (8) будуть вихідними при розрахунку координат $x \ y \ z$, які визначають розташування лінії дії сили тяги \vec{D} , що забезпечує рівноважний усталений режим роботи плуга.

Значення сили тиску на польові дошки N_1 не може бути довільним, а підбирається на основі вимоги практики.

A. Режим функціонування плуга при $N_1 \equiv 0$

Аналіз рівняння (9) дозволяє стверджувати, що при заданих координатах (x, y, z) , (x_0, y_0, z_0) , (x_1, y_1, z_1) величині $f_{1,2}$, M_z , компонент $\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)$, сили G , існує ситуація за котрої $N_1 \equiv 0$:

$$x \cdot R_y - y \cdot R_x - (y \cdot R_z - z \cdot R_y + y_0 \cdot G + M_z) \cdot f_2 + M_z = 0. \quad (15)$$

Тоді рівняння (12) зводиться до:

$$\ddot{\varphi} + \frac{l \cdot F_x}{I} \cdot \sin \varphi = 0. \quad (16)$$

У відповідності до [33] подамо (14) у вигляді:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \sin \varphi = 0, \quad (17)$$

де $\omega_0^2 = \frac{l \cdot F_x}{I}$. Рівняння (17) є рівнянням нелінійного маятника. По-

тенціал $V = -\omega_0^2 \cdot \cos \varphi$ й фазовий портрет наведені на рис. 2.

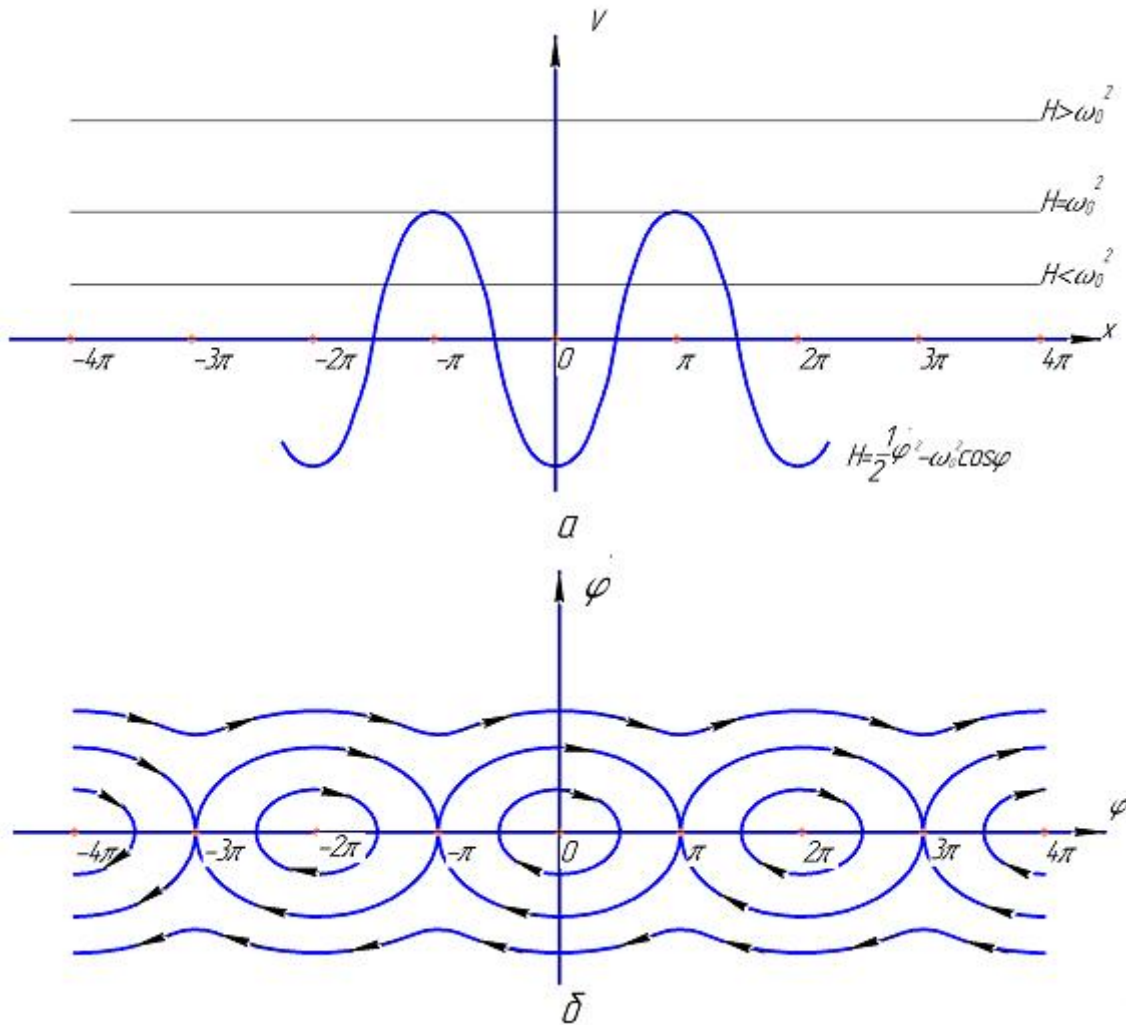


Рис. 2. Періодичний потенціал V (а) та відповідний йому фазовий портрет (б).

Стан рівноваги маятника визначається рівняннями:

$$\dot{\varphi}_s = 0, \sin \varphi_s = 0. \quad (18)$$

Це дає $\dot{\varphi}_s = 0$, $\varphi_s = \pi \cdot n$, $n = 0, \pm 1, \dots$

У положенні рівноваги швидкість $\dot{\varphi}_s$ дорівнює нулю, а потенціал $V(\varphi_s)$ має мінімум (парні n) чи максимум (непарні n). Відповідно точки при парних n – еліптичні, при непарних n – гіперболічні.

Траєкторії на фазовій площині при $\dot{I} < \omega_0^2$ відповідають «захопленням» часточкам, які здійснюють фінітні коливання у потенціальних ямах. При $\dot{I} > \omega_0^2$ фазові траєкторії відносяться до «прольотних» часточок, рух котрих інфінітний. Як видно з рис. 2, це періодичні коливання біля деякого значення швидкості, причому верхній та нижній гілкам фазових кривих відповідають різні напрямки швидкості.

Сепаратрисою є фазова траєкторія, що проходить через точку $\dot{x}_s = 0$, $\dot{x}_s = \pi$. Тому їй відповідає енергія $\dot{I}_s = \omega_0^2$. Розв'язок на сепаратрисі знайти просто. Дійсно, підставимо $\dot{I}_s = \omega_0^2$ у рівняння для \dot{I} :

$$H = \frac{1}{2} \cdot \dot{\varphi}^2 - \omega_0^2 \cdot \cos \varphi, \quad (19)$$

й виразимо з нього $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = \pm 2 \cdot \omega_0 \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad (20)$$

Звідси інтегрування за початкової умови $t = 0$, $\varphi = 0$ дає:

$$\omega_0 \cdot t = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (21)$$

або

$$\varphi = 4 \cdot \operatorname{arctg}(e^{\omega_0 t}) - \pi. \quad (22)$$

Вираз (22) є не що інше, як рівняння сепаратрисі (друга гілка сепаратрисі утворюється з першої (22) оберненням часу $t \rightarrow -t$).

Однак найбільш цікава інформація про динаміку плуга на сепаратрисі може бути отримана, якщо розглянути вираз для швидкості $\dot{\varphi} \equiv v$. Для цього з (21) отримуємо співвідношення:

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\omega_0 \cdot t)} = \operatorname{sech}(\omega_0 \cdot t), \quad (23)$$

а потім підставимо його у (20):

$$v = \pm \frac{2 \cdot \omega_0}{\operatorname{ch}(\omega_0 \cdot t)} = \pm 2 \cdot \omega_0 \cdot \operatorname{sech}(\omega_0 \cdot t), \quad (24)$$

Розв'язок типу (24) має вид уособленої хвилі (рис. 3) й носить назву солітона. Характерна ширина профіля швидкості $v \approx 1/\omega_0$. Його кінці експоненціально спадають при $t \rightarrow \pm\infty$. Знак плюс у (24) відповідає солітону, який рухається вправо (верхня гілка сепаратрисі на фазовій площині – рис. 2, б). Знак мінус у (24) відповідає руху вліво.

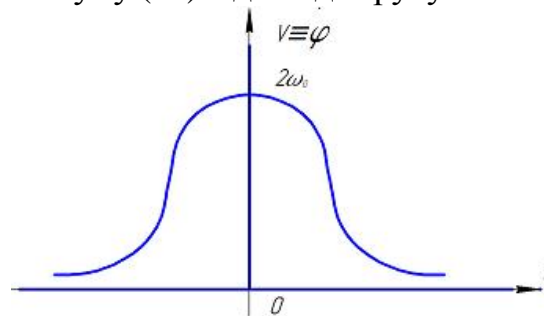


Рис. 3. Солітоноподібний розв'язок для швидкості $\dot{\varphi}$ руху плуга на сепаратрисі.

Розглянемо тепер загальний розв'язок рівняння (17) за тих самих початкових умов $t = 0$, $\varphi = 0$. Тут і надалі для зручності використаємо змінні дія – кут, визначені у [33] (формула (27)). Введемо параметр \varkappa :

$$\varkappa^2 = \frac{(\omega_0^2 + H)}{(2\omega_0^2)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{H}{\omega_0^2} \right), \quad (25)$$

який приймає на сепаратрисі значення 1 і змінюється у області $[0, \infty)$, та змінну ξ :

$$\begin{cases} \varkappa \cdot \sin \xi = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) & (\varkappa \leq 1), \\ \sin \xi = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) & (\varkappa \geq 1). \end{cases} \quad (26)$$

Маємо:

$$J = J(H) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_0} d\varphi [2(H + \omega_0^2 \cdot \cos \varphi)]^{1/2}, \quad (27)$$

де точка повороту φ_0 знаходиться з умови:

$$H + \omega_0^2 \cdot \cos \varphi_0 = 0, \quad (28)$$

і використана симетрія руху плуга при визначенні інтегралу $I(H)$.

Тут виникає необхідність до визначення виразу для $J(H)$ (дії) при значеннях параметру $\varkappa^2 > 1$. Дійсно, у цьому випадку з (25) випливає, що рівняння для точки повороту не має розв'язку, і у якості точки φ_0 у інтегралі для J слід взяти $\varphi_0 \equiv \pi$. При такому визначенні дія є площа, обмежена по φ областю $(-\pi, \pi)$ (див. рис. 2, б), і така, що лежить між верхньою та нижньою відносно сепаратриси гілками траєкторії. Саме таке визначення дозволяє здійснити неперервне «зшивання» розв'язку при переході через сепаратрису (похідна при цьому має розрив).

За допомогою підстановки (26) приходимо до виразу

$$I(H) = \frac{8}{\pi} \omega_0 \cdot \begin{cases} E\left(\frac{\pi}{2}; \varkappa\right) - (1 - \varkappa^2) \cdot F\left(\frac{\pi}{2}; \varkappa\right), & \varkappa \leq 1; \\ \varkappa \cdot E\left(\frac{\pi}{2}; \frac{1}{\varkappa}\right), & \varkappa \geq 1, \end{cases} \quad (29)$$

де $F\left(\frac{\pi}{2}; \varkappa\right)$ та $E\left(\frac{\pi}{2}; \varkappa\right)$ – повні еліптичні інтеграли відповідно першого та другого ряду.

З (29) одразу знаходимо частоту нелінійних коливань маятника:

$$\omega(H) = \frac{dH(I)}{dI} = \left[\frac{dI(H)}{dH} \right]^{-1}. \quad (30)$$

Використовуючи властивості еліптичних інтегралів, знаходимо:

$$\omega(H) = \frac{\pi}{2} \omega_0 \cdot \begin{cases} \frac{1}{F\left(\frac{\pi}{2}; \varkappa\right)}, & \varkappa \leq 1; \\ \frac{\varkappa}{F\left(\frac{\pi}{2}; \frac{1}{\varkappa}\right)}, & \varkappa \geq 1. \end{cases} \quad (31)$$

Згідно з формулою для S (скороченої дії) [1] (формула (2.7)) маємо у даному випадку ($\tilde{x} \equiv \varphi$):

$$S(\tilde{x}, I) = \begin{cases} 4\omega_0 \cdot [E(\xi; \varkappa) - (1 - \varkappa^2) \cdot F(\xi; \varkappa)], & \varkappa \leq 1; \\ 4\omega_0 \cdot \varkappa \cdot E\left(\xi; \frac{1}{\varkappa}\right), & \varkappa \geq 1, \end{cases} \quad (32)$$

де $\xi = \xi(\varphi)$ – визначається формулами (26).

Неважко бачити, що повному інтегралу по чверті періоду руху відповідає точка \tilde{x}_0 така ($\tilde{x}_0 \equiv \varphi_0$), що:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) = \varkappa^2 & (\varkappa \leq 1), \\ \sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) = 1 & (\varkappa \geq 1). \end{cases} \quad (33)$$

Звідси у будь-якому випадку $\xi_0 = \frac{\pi}{2}$, і вираз $\frac{4S(\varphi_0, T)}{(2\pi)}$ переходить у формули для дії (29), як це і повинно бути.

Диференціювання $S(\varphi, I)$ по I визначає фазову змінну θ (див. формулу (2.7) у [1]).

З формули (19) для H і визначення (26) знаходимо швидкість (кутову) плуга:

$$\dot{\varphi} = 2\varkappa\omega_0 \cdot \left\{ \frac{\tilde{n}\operatorname{os}\xi}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varkappa^2} \cdot \sin^2\xi}} \right\} = 2\varkappa\omega_0 \cdot \begin{cases} cn(t; \varkappa); & \varkappa \leq 1; \\ dn(t; \frac{1}{\varkappa}) & \varkappa \geq 1, \end{cases} \quad (34)$$

де cn та dn – еліптичні функції Якобі. При $\varkappa = 1$ вираз (34) переходить у вираз (24) (знаки \pm для спрощення опущені).

Визначимо далі спектр «нелінійного маятника» – моделі плуга у даному режимі функціонування. Спочатку нашою метою буде зрозуміти якісний характер коливань маятника для різних значень його енергії H .

Для цього зробимо дві речі. По-перше, введемо число:

$$\tilde{N} = \frac{\omega_0}{\omega(H)} = \frac{2}{\pi} \cdot F\left(\frac{\pi}{2}; \varkappa\right), \quad \varkappa \leq 1, \quad (35)$$

і, по-друге, розкладемо вираз (34) для $\dot{\varphi}$ у ряд Фур'є:

$$\dot{\varphi} = 8\omega \cdot \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-\frac{1}{2}}}{1+a^{2n-1}} \cdot \cos[(2n-1)\omega t], & \varkappa \leq 1; \\ \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} \cdot \cos(n \omega t), & \varkappa \geq 1, \end{cases} \quad (36)$$

де

$$\begin{cases} a = \exp\left(-\pi \cdot \frac{F'}{F}\right); & F \equiv F\left(\frac{\pi}{2}; \bar{\varkappa}\right); \\ F' \equiv F\left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{1-\bar{\varkappa}^2}\right); & \omega = \omega(H); \\ \bar{\varkappa} = \begin{cases} \varkappa, & \varkappa \leq 1; \\ \frac{1}{\varkappa}, & \varkappa \geq 1. \end{cases} \end{cases} \quad (37)$$

Розглянемо тепер різноманітні асимптотики виразів (36) та (37). Скористаємось наступними асимптотиками повного еліптичного інтегралу $F\left(\frac{\pi}{2}; \varkappa\right)$:

$$F\left(\frac{\pi}{2}; \varkappa\right) \approx \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \varkappa \ll 1; \\ \frac{1}{2} \cdot \ln\left[\frac{32Hs}{Hs-H}\right], & 1-\varkappa^2 \ll 1. \end{cases} \quad (38)$$

Звідси:

$$\tilde{N} \approx \begin{cases} 1, & \varkappa \ll 1; \\ \frac{1}{\pi} \cdot \ln\left[\frac{32Hs}{Hs-H}\right], & 1-\varkappa^2 \ll 1. \end{cases} \quad (39)$$

Аналітично з (37), (38) та (35) знаходимо:

$$a \approx \begin{cases} \frac{\varkappa^2}{32}, & \varkappa \leq 1; \\ \exp\left(-\frac{\pi}{\tilde{N}}\right), & 1-\varkappa^2 \ll 1. \end{cases} \quad (40)$$

Тепер легко визначити характер коливань «маятника» – моделі плуга у всіх областях. При $\varkappa \ll 1$, тобто при дуже малих енергіях системи, частота $\omega(H) \approx \omega_0$ та $\tilde{N} \approx 1$. Крім того, згідно (40) амплітуди a малі. Тому у (36) має сенс залишити тільки першу складову суми, оскільки малі значення інших нарощуються із зростанням n . Це дає:

$$\dot{\varphi} = v = \dot{x} \approx \omega_0 \cdot \sqrt{2\varkappa^2} \cdot \cos(\omega_0 t) = \sqrt{2\omega_0 \cdot I} \cdot \cos(\omega_0 t), \quad (41)$$

у відповідності зі звичайною лінійною теорією (дійсно, енергія, яка відраховується від дна потенціальної ями, дорівнює $\delta H = \omega_0^2 + H$, й $I = \frac{\delta H}{\omega_0} = \varepsilon^2 \cdot \frac{Hs}{\omega_0} = \varepsilon^2 \cdot \omega_0$, $Hs \equiv \omega_0^2$).

Нехай тепер $\varepsilon^2 \rightarrow 1$, тобто $H \rightarrow Hs$. Тоді поблизу сепаратриси частота $\omega(H) \rightarrow 0$, а період коливань логарифмічно розходиться (див. (39)). Швидкість плуга φ_0 наближається до періодичної послідовності солітоноподібних імпульсів (рис. 4). Відстань між двома горбами у одній і тій самій фазі близька до періоду коливань $\frac{2\pi}{\omega(I)}$, а ширина кожного горба близька до $\frac{2\pi}{\omega_0}$. Тому число \tilde{N} визначає «скважність» функції $\dot{\varphi}(t) \equiv v(t)$. Якщо ввести спектр швидкості $\dot{\varphi}(t)$:

$$\dot{\varphi}(I, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(I) \exp(in\theta), \quad i^2 = -1, \quad (42)$$

можна побачити, що згідно (40) та (36) при $\tilde{N} \gg 1$, тобто поблизу сепаратриси,

$$b_n = 8\omega \cdot \frac{a^{n-\frac{1}{2}}}{1+a^{2n-1}}. \quad (43)$$

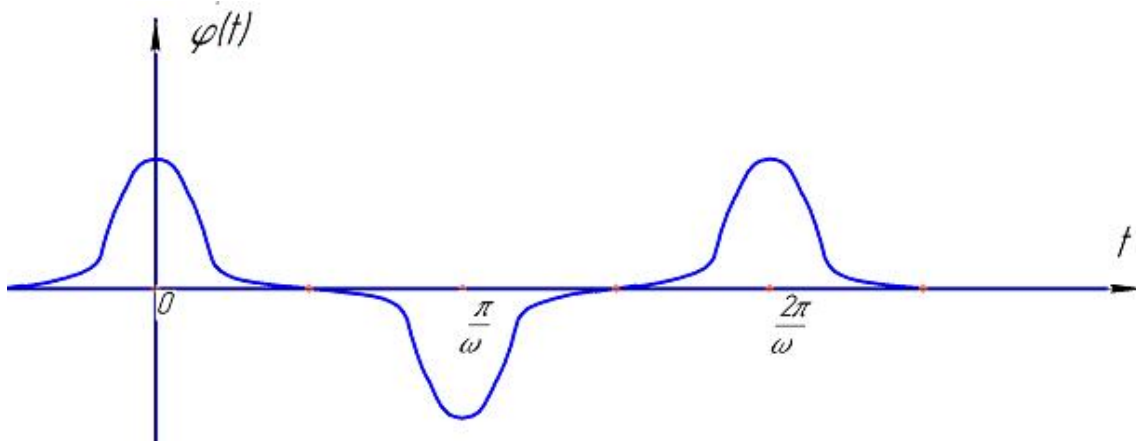


Рис. 4. Залежність швидкості $v(t) \equiv \dot{\varphi}(t)$ плуга від часу t поблизу сепаратриси.

Приймаючи до уваги вираз для \dot{a} у (40) при $1 - \varepsilon^2 \ll 1$, отримаємо:

$$b_n \approx 8\omega \cdot \begin{cases} 1, & 1 < n \leq \tilde{N}; \\ \exp\left(-\pi \cdot \frac{n}{\tilde{N}}\right), & n > \tilde{N}, \end{cases} \quad (44)$$

тобто всі амплітуди приблизно рівні до $n \approx \tilde{N}$ й експоненціально малі при $n > \tilde{N}$ у відповідності з міркуваннями, виказаними раніше. Звідси випливає, що спектр нелінійних коливань «маятника» -

моделі плуга має вид, наведений на рис. 5, і число \tilde{N} визначає характерне число гармонік у спектрі.

При наближенні до сепаратриси $\tilde{N} \rightarrow \infty$, а сам спектр прямує до неперервного. Величина \tilde{N} є параметром характерного обрізання числа гармонік спектру.

Поява розбіжності при $\omega \rightarrow 0$ є наслідком наближення до траєкторії, яка проходить через гіперболічну точку (тобто до сепаратриси). Ця властивість має місце не тільки при $\dot{I} \rightarrow \omega_0^2 - 0$, тобто знизу, але і при $\dot{I} \rightarrow \omega_0^2 + 0$, тобто зі сторони інфінітних траєкторій (на фазовому портреті системи).

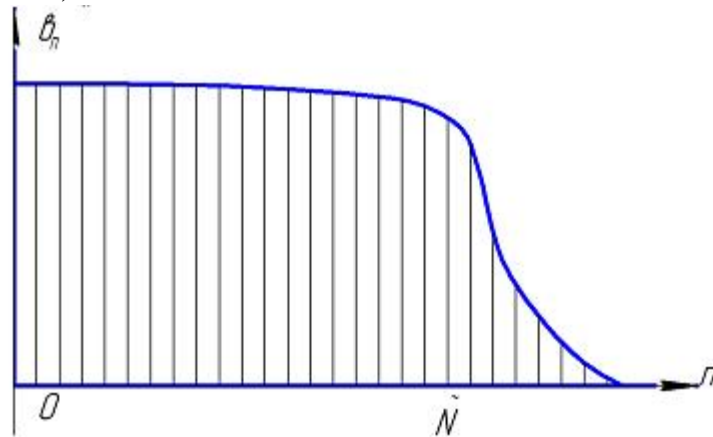


Рис. 5. Спектр швидкості $\dot{\phi}$ плуга у околі сепаратриси.

З'ясуємо загальні властивості періоду коливань плуга. Розглянемо більш детально, яким чином з'являються нульові чи дуже малі частоти коливань, котрі, як ми тільки що бачили, радикальним чином змінюють всю картину коливань плуга по мірі віддалення від еліптичної точки положення рівноваги. З'ясувати це дуже важливо, оскільки мова йде про отримання більш детальної інформації про систему плуга при наближенні її траєкторії до нестійких особливих точок.

Диференціювання I по H у формулі:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \rho(q, H) dq = I(H), \quad (45)$$

де ρ – імпульс,

q – узагальнена координата системи,

H – її енергія, а також визначення $\omega(I)$:

$$\omega(I) = \frac{dH(I)}{dI} = \left(\frac{dI(H)}{dH} \right)^{-1}, \quad (46)$$

дають період коливань системи (плуга) у потенціальній ямі:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \oint \frac{d\varphi}{[2(H - V(\varphi))]^{1/2}}, \quad (47)$$

Дослідимо у загальній формі цей вираз поблизу сепаратриси. Для цього позначимо відстань енергії до сепаратриси через:

$$\Delta = |H - H_s| \ll H_s, \quad (48)$$

Подамо знаменник у (47) у вигляді:

$$[2(H - V(\varphi))]^{1/2} \approx [(\varphi - \varphi_a)(\varphi - \varphi_b)(\varphi - \varphi_1)\dots(\varphi - \varphi_n)]^{1/2} \cdot \chi(\varphi), \quad (49)$$

де φ_a й φ_b – точки повороту, між котрими здійснюється фінітний рух;

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – всі інші точки повороту, котрі розміщені поблизу, скажімо, φ_b ;

$\chi(\varphi)$ – функція, яка не має нулів у комплексній площині у околі траєкторії.

Для спрощення обмежимося випадком, коли всі φ_s , $s = \overline{1, i}$, є дійсними коренями і нулі з малою уявною частиною відсутні. У прикладі на рис. 6 $i = 5$.

Основний внесок у вираз для T дають області по φ у околі полюсів підінтегрального виразу, тобто нулі імпульсів (49). Близько розміщені нулі збільшують кратність полюса. У колі сепаратриси завжди є, принаймі, близькість до двократного виродження: $n \geq 1$.

На основі зробленого зауваження здійснюємо інтегрування у (47) тільки у околі полюса. Це дає:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot \begin{cases} \ln\left(\frac{H_s}{\Delta}\right), & n = 1; \\ \left(\frac{\Delta}{H_s}\right)^{(n-1)/2}, & n > 1. \end{cases} \quad (50)$$

З формули (50) можна визначити степінь нелінійності коливань плуга:

$$\frac{d\omega}{dH} \approx \begin{cases} \omega^2 / (\omega_0 \cdot \Delta), & n = 1; \\ \omega / \Delta, & n > 1. \end{cases} \quad (51)$$

Зручно останню формулу виразити або тільки через енергію, або тільки через частоту. Маємо:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dH} \cdot \frac{H_s}{\omega} \approx \frac{H_s}{\Delta} \cdot \begin{cases} \frac{1}{\ln\left(\frac{H_s}{\Delta}\right)}, & n = 1; \\ 1, & n > 1; \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \exp\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right), & n = 1; \\ \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^{2/(n-1)}, & n > 1. \end{cases} \quad (52)$$

Найбільш універсальний опис вийде у енергетичній шкалі. Параметр нелінійності прямує до одиниці по мірі зростання числа точок повороту i , близьких до даної точки повороту.

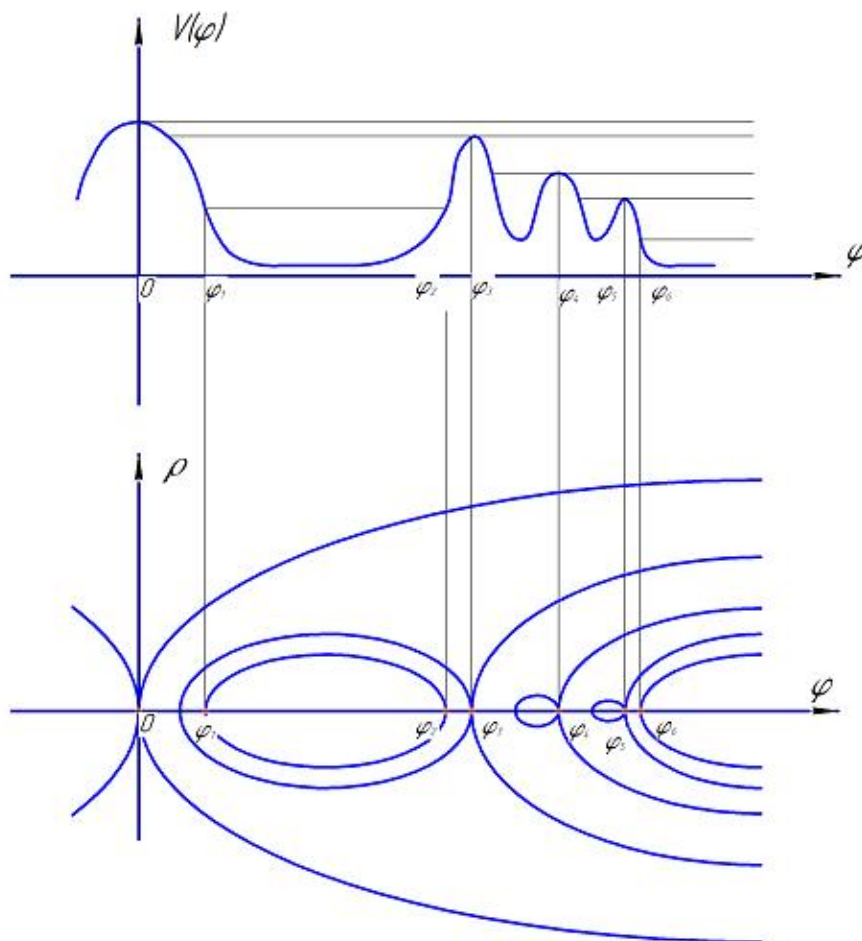


Рис. 6. Випадок кількох (трьох) близьких сідлових точок фазової траєкторії плуга.

Висновки.

1. Визначено основні параметри автоколивань (вібро-) плуга у горизонтальній площині за наявності сил в'язкого тертя останнього з ґрунтом, не застосовуючи, при цьому процедуру лінеаризації.

2. Отримані результати можуть бути у подальшому використані для уточнення і вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку (контактних задач) віброплугів, взаємодіючих з оброблюваним ґрунтом та застосування подібних розрахунків у системах точного землеробства.

Література.

1. Заїка П. М. Теорія сільськогосподарських машин. Т. 1 (ч. 1). Машини та знаряддя для обробітку ґрунту. / П. М. Заїка. – Харків: Око, 2001. – 444с.
2. Методика построения расчетных моделей функционирования механических систем. / П. М. Василенко, В.П. Василенко. – К.: УСХА, 1980. – 135с.

3. *Василенко П. М.* Введение в земледельческую механику. / *П.М. Василенко.* – К.: Сільгоспосвіта, 1966. – 251с.
4. *Василенко П. М.* Основи аналітичних методів землеробської механіки. / *П. М. Василенко.* – К.: Видавництво НАУ, 1998. – 29с.
5. *Войтюк Д. Г.* Сільськогосподарські машини. / *Д. Г. Войтюк, Г.Р. Гаврилук.* – К.: Урожай, 1994. – 446с.
6. *Горячкін В. П.* Собрание сочинений в 3-х томах. / *В. П. Горячкін.* – М.: Колос, 1965. – Т. 1. – 720с.; Т. 2. – 459с.; Т. 3. – 512с.
7. *Заика П. М.* Избранные задачи земледельческой механики. / *П. М. Заика.* – К.: Изд-во УСХА, 1992. – 509с.
8. *Кленин Н. И.* Сельскохозяйственные машины. / *Н. И. Кленин, В.А. Саун.* – М.: Колос, 1994. – 751с.
9. *Комаристов В. Ю., Дунай М. Ф.* Сільськогосподарські машини. / *В. Ю. Комаристов, М. Ф. Дунай.* – К.: Вища школа, 1987. – 486с.
10. *Крамаренко Л. П.* Сельскохозяйственные машины. Теория, конструирование и расчет. Том. 1 – Машины и орудия для обработки почвы и посева. / *Л. П. Крамаренко.* – Харьков: Госуд. научн.-техн. изд-во Украины, 1937. – 368с.
11. *Краснощеков Н. В.* Механика почвозащитного земледелия. / *Н.В. Краснощеков.* – Новосибирск: Наука, 1984. – 200с.
12. *Летошнев М. Н.* Сельскохозяйственные машины. Теория, расчет, проектирование и испытание. / *М.Н. Летошнев.* – М. – Л.: Изд.-во с. х. л-ры, 1955. – 764с.
13. *Лурье А. Б., Громбачевский.* Расчет и конструирование сельскохозяйственных машин. / *А.Б. Лурье.* – Л.: Машиностроение, 1977. – 527с.
14. *Сабликов М. В.* Сельскохозяйственные машины. Часть 2. Основы теории и технологического расчета. / *М.В. Сабликов.* – М.: Колос, 1988. – 296с.
15. Сельскохозяйственные машины. Теория, конструирование и расчет / *Б. Г. Турбин, А. Б. Лурье, С. М. Григорьев и др.;* Под ред. *Б. Г. Турбина.* – М. – Л.: Маш. изд., 1963. – 575с.
16. Сельскохозяйственные и мелиоративные машины / *Г. Е. Листопад, Г. К. Демидюк, Б. Д. Зонов и др.;* Под общ. ред. *Г. Е. Листопада.* – М.: Машиностроение, 1977. – 328с.
17. *Синеоков Г. Н., Панов И. М.* Теория и расчет почвообрабатывающих машин. / *Г.Н. Синеоков, И.М. Панов.* – М.: Машиностроение, 1977. – 328с.
18. *Тураев Л. Д.* Динамика плуга. / *Л.Д. Тураев.* – Харьков: Изд.-во Харьковского университета, 1973. – 161с.
19. *Хайлис Г. А.* Основы теории и расчета сельскохозяйственных машин. / *Г.А. Хайлис.* – К.: Изд.-во УСХА, 1992. – 235с.

20. *Горячкин В. П.* Собрание сочинений.: В 3т. / Под ред. акад. *Н. Д. Лучинского.* – М.: Колос, 1968. – Т. 3 – 348с.
21. *Комаристов В. Ю.* Сільськогосподарські машини. / *В. Ю. Комаристов, М.М. Петренко, М.М. Косінов.* – К.: Урожай, 1996. – 240с.
22. *Листопад Г. Е.* Сельскохозяйственные и мелиоративные машины. / *Г. Е. Листопад, Г.К. Демидов, Б. Д. Зонов и др.* – М.: Агропромиздат, 1986. – 688с.
23. Сільськогосподарські машини: теоретичні основи, конструкція, проектування: Підручник / За ред. *М. І. Чернова.* – К.: Урожай, 2001. – Кн. 1: Машини для рільництва. – 384с.
24. Сільськогосподарські машини. Основи теорії та розрахунку: Підручник / Під ред. *Д. Г. Войтюка.* – К.: Вища освіта, 2005. – 464с.
25. Теория, конструирование и расчет сельскохозяйственных машин: Учебник / *Е. С. Босой, О. В. Верняев, И. И. Смирнов, Е. Г. Султан-Шах;* Под ред. *Е. С. Босого.* – М.: Машиностроение, 1977. – 568с.
26. *Войтюк Д. Г., Яцун С. С., Довжик М. Я.* Сільськогосподарські машини: основи теорії та розрахунку: Навчальний посібник / За ред. *Д. Г. Войтюка.* – Суми: ВТД «Університетська книга», 2008. – 543с.
27. *Ден-Гартюг Дж. П.* Механические колебания. / *Дж. П. Ден-Гартюг.* – М.: Физмат гиз, 1960. – 320с.
28. *Den-Hartod I. P.* Forced Vibrations With Combined Coulomb and Viscous Friction // Transactions of ASME. APM. / *I. P. Den-Hartod.* – 1931. – V.53. – No.9. – P.107 – 115.
29. *Стрекис А. М.* Вынужденные колебания с одной степенью свободы при наличии сухого трения и при произвольной возмущающей силе. // Вопросы динамики и динамической прочности. / *А.М. Стрекис.* – Рига: РПИ, 1956. – Вып.4.
30. *Сакович В. Л.* Метод решения уравнений динамически нелинейных вибросистем. // Вопросы теории проектирования и эксплуатации строительных машин. / *Сакович В. Л.* – Киев: КИСИ, 1964. – Вып. 20. – с. 91 – 105.
31. *Сакович В. Л.* Вынужденные колебания вибратора при наличии сухого трения. // Вопросы теории проектирования и эксплуатации строительных машин. / *В.Л. Сакович.* – Киев: КИСИ, 1964. – Вып. 20. – с. 116 – 127.
32. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. – Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / Под ред. *И. И. Блехмана.* 1979. – 351с.
33. *Заскавский Г. М., Сагдеев Р. З.* Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. / *Г.М. Заскавский, Р. З. Сагдеев.* – М.: Наука, 1988. – 368с.

АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВИБРОПЛУГА В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Ловейкін В. С., Човнюк Ю. В, Дяченко Л. А.

Аннотация

Проведен анализ динамической устойчивости вибропуга в горизонтальной плоскости. Создана математическая модель движения вибропуга. Определены основные закономерности, зависимости рабочих параметров конструкции в режимах холостого хода вибропуга и его реальной эксплуатации.

THE ANALYSIS OF THE DYNAMIC CONSTANCY OF THE VIBROPLOUGH IN HORIZONTAL POSITION

V. Loveykin , Y. Chovnyuk , L. Dyachenko

Summary

The analysis of the dynamic constancy of the vibroplough in horizontal position is conducted. The mathematic model of the movement of the vibroplough is created. Consistent puffers and dependencies of the working parameters of the the working parameters of the vibroplough in the suspend mode and in its working mode are deferminded.