

УДК.529.796+621.317.76.089.68

## МОДЕЛЬ ТРАВМОВАНОЇ КІСТКОВОЇ ТКАНИНИ ТВАРИН, ЩО ЗНАХОДИТЬСЯ ПІД ДІЄЮ НВЧ ОПРОМІНЕННЯ

Яковлев В. Ф., к.т.н.,

Орел О. М., к.т.н.

*Таврійський державний агротехнологічний університет*

Тел. (06192)42-11-74

**Анотація** – Робота присвячена теоретичному дослідженню взаємодії електромагнітного поля НВЧ – діапазону з тканинами тварин з ціллю визначення оптимальних параметрів діючого поля стимулюючого лікування кісткових захворювань тварин.

**Ключові слова** – електричний і магнітний вектор, вектор Пойтінга, поляризація, хвильове число, циліндрична система координат.

*Постановка проблеми.* Низкою досліджень установлена висока ефективність лікування захворювань кісткової тканини тварин, у тому числі і переломів, за допомогою низькоенергетичних випромінювань НВЧ діапазону. Однак, у більшості випадків, як параметри діючого електромагнітного поля, так і використовувана для цієї мети апаратура вибирається досить довільно, що пояснюється відсутністю строгих теоретичних досліджень механізму взаємодії зазначених полів із тканинами тварин.

*Формулювання цілей статті.* Метою даної роботи є моделювання розподілу електромагнітних полів НВЧ діапазону в кінцівках тварин з метою визначення оптимальних параметрів поля, що впливає, стимулюючого процес лікування кісткових захворювань і, на цій основі, розрахунку конструктивних параметрів самого технічного за-собу для лікування.

*Основна частина.* Як фізичну модель прийнято, кінцівка тварини, що являє собою нескінченний циліндр радіуса  $R$  поміщений у простір, який володіє діелектричною  $\epsilon_0$  і магнітної  $\mu_0$  проникністю.

Уздовж вісі циліндра його електромагнітні властивості не змінюються, а по радіусі він являє собою шарувату структуру з п'ятьма шарами, що відповідають кістковому мозку, кісті, м'язовій тканині, шкірі і вовняному покриву. При цьому кожний із шарів має свою діелектричну проникність  $\epsilon_i$ , де  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Що стосується магнітної проникності кожного шару кінцівці тварини, що моделюється, то циліндр і навколишнє його середовище, тобто повітря, є немагнітними, вона скрізь дорівнює магнітної проникності вільного простору, тобто  $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м.

Нехай на розглянутий циліндр падає плоска електромагнітна хвиля, що поширюється в напрямку, перпендикулярному його вісі. При цьому можливі два випадки:

- вісі циліндра - рівнобіжний електричний вектор (Е- поляризація);
- вісі циліндра - рівнобіжний магнітний вектор (Н - поляризація).

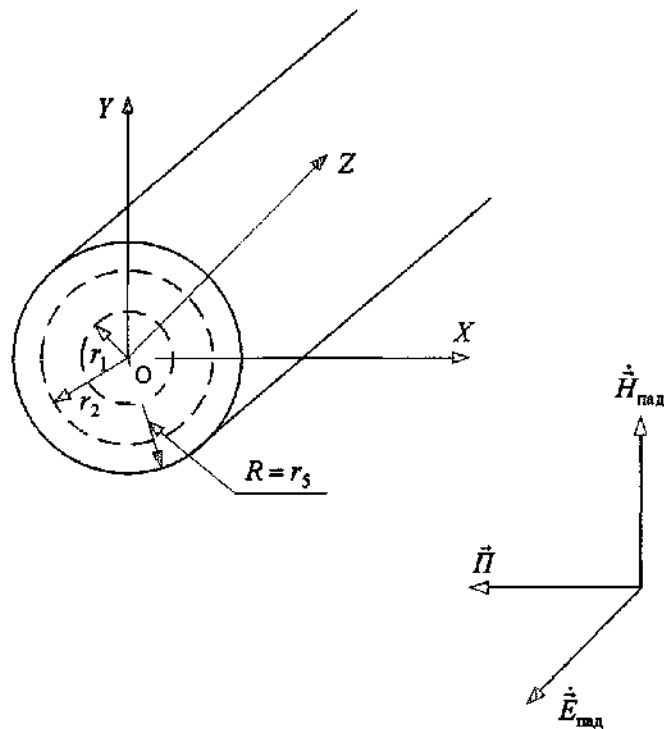


Рис. 1. Орієнтація складових падаючого ЕМП відносно кінцівок тварини.

Довільна орієнтація векторів електричної  $\dot{E}$  і магнітний  $\dot{H}$  складових падаючого електромагнітного випромінювання може бути отримана як суперпозиція цих двох випадків. Крапки над позначеннями векторів свідчать про те, що їхні амплітуди - комплексні величини. Для рішення задачі введена циліндрична система координат, у якій вісь OZ співпадає з віссю циліндра. Вектор Пойнтинга  $\vec{P}$  падаючої хвилі направлений в негативну сторону вісі OX. При цьому розглядається буде Е- поляризація у відповідності з рис. 1.

Рішення задачі полягає в перетворенні електромагнітних полів усередині циліндра. При цьому перехід від Е- поляризації до Н- поляризації може бути зроблений за допомогою заміни  $\dot{E} \rightarrow \dot{H}$ ,  $\epsilon \rightarrow \mu$ . Нескінченність циліндра по вісі буде забезпечуватися в практичних випадках завжди, якщо його довжина принаймні на порядок буде біль-

ше радіуса циліндра, тобто коли можна зневажити крайовими ефектами на торцях. Крім того, перерозсіювання ЕМВ, що впливає на кінцівку тварини від поверхні землі, тулуба тварини й інших об'єктів можна не враховувати, що зв'язано з довжиною хвилі використовуваного випромінювання, а також можливим вибором конструкції антени.

Відповідно до вихідних умов падаюче поле при Е- поляризації буде мати вигляд [1, 2]:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{x\text{пад}} = \dot{E}_{y\text{пад}} = 0; & \quad \dot{H}_{x\text{пад}} = \dot{H}_{z\text{пад}} = 0; \\ \dot{E}_{z\text{пад}} = \dot{E}_0 e^{jk_0 x}; & \quad \dot{H}_{y\text{пад}} = \dot{H}_0 e^{jk_0 x}, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\dot{E}_0$  і  $\dot{H}_0$  – комплексні амплітуди електричного і магнітного поля, відповідно;

$k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  – хвильове число в навколишньому середовищі циліндру;

$\omega = 2\pi f$  – кругова частота падаючого випромінювання;

$f$  – частота ЕМП.

Тут і далі часовий множник  $e^{j\omega t}$  пропущений.

Рішення задачі про розподіл електромагнітних полів у прийнятій фізичній моделі умовно можна розподілити на дві складові. Перша з них - це задача про визначення внутрішніх полів в суцільному однорідному біологічному об'єкті, що має циліндричну форму.

Строге рішення даної задачі зводиться до рішення рівнянь Максвелла при заданих граничних умовах для складових електромагнітного поля на поверхні циліндра з урахуванням умови випромінювання на нескінченності.

Присутність циліндра змінює поле як по напрямку розповсюдження (вісь ОХ, так і в перпендикулярному до нього напрямку (вісь ОУ). У напрямку вісі циліндра з урахуванням його однорідності поле не змінюється, тому в рівняннях Максвелла часна похідна по напрямку вісі дорівнює нулю ( $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ ). В циліндричній системі координат з урахуванням вище сказаного і (1) рівняння Максвелла [1, 2]

$$\begin{cases} \text{rot } \dot{H} = j\omega \epsilon \dot{E}; \\ \text{rot } \dot{E} = -j\omega \mu \dot{H} \end{cases}, \quad (2)$$

приймає вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} + j\omega \mu r \dot{H}_r = 0; \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} - j\omega \mu \dot{H}_\varphi = 0; \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{H}_\varphi) - \frac{\partial \dot{H}_r}{\partial \varphi} \right] - j\omega \varepsilon \dot{E}_z = 0. \end{cases} \quad (3)$$

З (3) випливає, що оскільки м'язова і кісткова тканина тварини ізотропна, то при наявності в падаючому полі тільки подовжньої складовий  $\dot{E}_z$  у розсіяному полі буде також присутня тільки повздовжня складова електричного поля.

У випадку однорідного діелектричного циліндра весь простір, у якому існує електромагнітне поле, розділимо на дві області: зовнішню і внутрішню стосовно циліндра.

В зовнішній області, що характеризується  $\varepsilon_0$  і  $\mu_0$ , існує падаюче поле  $\dot{E}_{z\text{пад}}$  і відбите  $-\dot{E}_{z\text{отр}}$ . У внутрішній області циліндра, що характеризується проникностями  $\varepsilon$  і  $\mu_0$ , існує тільки розсіяне всередину поле  $\dot{E}_z$ . При цьому  $\dot{E}_{z\text{пад}}$  визначається з (1), а  $\dot{E}_{z\text{отр}}$  і  $\dot{E}_z$  повинні відповідати системі (3). З сказаного витікає, що на границі між зовнішньою і внутрішньою областями, тобто на поверхні циліндра, поле повинно відповідати співвідношенням:

$$\dot{E}_z \Big|_{r=R} = \dot{E}_{z\text{пад}} \Big|_{r=R} + \dot{E}_{z\text{отр}} \Big|_{r=R}; \quad \dot{H}_\varphi \Big|_{r=R} = \dot{H}_{\varphi\text{пад}} \Big|_{r=R} + \dot{H}_{\varphi\text{отр}} \Big|_{r=R}. \quad (4)$$

Для рішення системи (3) виразимо  $\dot{H}_r$  і  $\dot{H}_\varphi$  з першого і другого рівнянь і підставимо в третє рівняння. Це дає:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \varphi^2} + k^2 \dot{E}_z = 0, \quad (5)$$

де  $\dot{E}_z$  відповідає або розсіяному усередину або відбитому полю;  $k$  визначається  $\varepsilon_0, \mu_0$  або  $\varepsilon, \mu_0$  у залежності від області, у якій вирішується рівняння (5).

Диференціальне рівняння другого порядку в часних похідних (5) вирішується методом поділу перемінних [81]. З цієї ціллю позначимо

$$\dot{E}_z = P(r) \cdot \Phi(\varphi). \quad (6)$$

Підставляючи (6) у (5), одержуємо два незалежних звичайних диференціальних рівняння:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0; \quad (7)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0, \quad (8)$$

де  $m$  - деяке число.

Враховуючи, що у циліндричній системі координат  $\dot{E}_{z\text{пад}}$  має вигляд:

$$\dot{E}_{z\text{пад}} = \dot{E}_0 e^{jk_0 x} = \dot{E}_0 e^{jk_0 r \cos \varphi}, \quad (9)$$

і є парною функцією куту  $\varphi$ , а початок координат розташований на вісі циліндру, вимоги до кінцівки поля на вісі циліндру, приймаючи до уваги функції Ханкеля, що відповідають хвилям, які йдуть з нескінченності  $H_m^{(1)}(kr)$  і навпаки, від циліндру на нескінченність  $H_m^{(2)}(kr)$ , для яких  $|kr| \gg 1$  і  $|kr| \gg m$ , виконуючи відповідні перетворення відповідно [3] задача про розсіяння електромагнітного поля на однорідному циліндрі приводить до отримання таких рівнянь, що описують три види хвиль:

- падаючу

$$\dot{E}_{z\text{пад}} = \dot{E}_0 e^{jk_0 r \cos \varphi}, \quad (10)$$

- відбиту

$$E_{z\text{отр}} = \sum_{m=0}^{\infty} \dot{C}_m H_m^{(2)}(k_0 r) \cos(m\varphi), \quad (11)$$

де  $\dot{C}_m = A_{1m} * A_{6m}$

- що пройшла всередину циліндра

$$\dot{E}_z = \sum_{m=0}^{\infty} \dot{B}_m J_m(kr) \cos(m\varphi) \quad (12)$$

де  $\dot{B}_m = A_{1m} * A_{3m}$ .

У (11), (12) проводиться підсумовування по  $m$ , тому що воно може приймати будь-які цілі значення. Виходить, загальне рішення повинне бути суперпозицією всіх можливих рішень. При цьому, з урахуванням парності розглянутої задачі, негативні значення  $m$  не беруться.

Таким чином, усередині циліндра буде існувати поле, яке визначається виразом (12), а поза циліндром –

$$\dot{E}_{z\text{пад}} + \dot{E}_{z\text{отр}} = \dot{E}_0 e^{jk_0 r \cos \varphi} + \sum_{m=0}^{\infty} \dot{C}_m H_m^{(2)}(k_0 r) \cos(m\varphi). \quad (13)$$

Величини невідомих коефіцієнтів  $\dot{B}_m$  і  $\dot{C}_m$  визначаються з граничних умов (4).

Першу граничну умову (4) отримаємо, дорівнюючи (12) и (13) при умові, що  $r = R$ :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \dot{B}_m J_m(kR) \cos(m\varphi) = \dot{E}_0 e^{jk_0 R \cos \varphi} + \sum_{m=0}^{\infty} \dot{C}_m H_m^{(2)}(k_0 R) \cos(m\varphi). \quad (14)$$

Використовуючи положення теорії поля, функцій Бесселя [4] і враховуючи незалежність рішень для різних  $m$  отримаємо:

$$\dot{B}_0 J_0(kR) = \dot{E}_0 J_0(k_0 R) + \dot{C}_0 H_0^{(2)}(k_0 R), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \dot{B}_m J_m(kR) \cos(m\varphi) = \\ & = 2\dot{E}_0 \sum_{m=1}^{\infty} (j)^m J_m(k_0 R) \cos(m\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} \dot{C}_m H_m^{(2)}(k_0 R) \cos(m\varphi). \end{aligned} \quad (16)$$

Виражаючи  $\dot{H}_\varphi$  через  $\dot{E}_z$  з (3) для другої граничної умови отримаємо вирази:

$$\dot{H}_{\varphi\text{пад}} = -j \frac{\dot{E}_0 k_0}{\omega \mu_0} \left[ -J_1(k_0 r) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (j)^m J'_m(k_0 r) \cos(m\varphi) \right], \quad (17)$$

відбите поле –

$$\dot{H}_{\varphi\text{отр}} = -j \frac{k_0}{\omega \mu_0} \sum_{m=0}^{\infty} \dot{C}_m H_m^{(2)'}(k_0 r) \cos(m\varphi), \quad (18)$$

поле, що пройшло всередину циліндра –

$$\dot{H}_\varphi = -j \frac{k}{\omega \mu_0} \sum_{m=0}^{\infty} \dot{B}_m J'_m(kr) \cos(m\varphi). \quad (19)$$

Підставляючи (17) - (19) у друге рівняння (4), отримаємо граничні умови для тангенціальних складових магнітного поля:

$$\begin{aligned} & k \sum_{m=1}^{\infty} \dot{B}_m J'_m(kR) \cos(m\varphi) = -\dot{E}_0 k_0 J_1(k_0 R) + \\ & + 2\dot{E}_0 k_0 \sum_{m=1}^{\infty} (j)^m J'_m(k_0 R) \cos(m\varphi) + k_0 \sum_{m=0}^{\infty} \dot{C}_m H_m^{(2)'}(k_0 R) \cos(m\varphi), \end{aligned} \quad (20)$$

що також приводить до двох рівнянь:

$$k \dot{B}_0 J_1(kR) = \dot{E}_0 k_0 J_1(k_0 R) + k_0 \dot{C}_0 H_1^{(2)}(k_0 R), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & k \sum_{m=1}^{\infty} \dot{B}_m J'_m(kR) \cos(m\varphi) = 2\dot{E}_0 k_0 \sum_{m=1}^{\infty} (j)^m J'_m(k_0 R) \cos(m\varphi) + \\ & + k_0 \sum_{m=0}^{\infty} \dot{C}_m H_m^{(2)'}(k_0 R) \cos(m\varphi). \end{aligned} \quad (22)$$

Рівняння (15), (21) утворюють неоднорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів  $\dot{B}_0$  и  $\dot{C}_0$ . Її рішення має вид:

$$\dot{B}_0 = \dot{E}_0 k_0 \frac{J_1(k_0 R) H_0^{(2)}(k_0 R) - J_0(k_0 R) H_1^{(2)}(k_0 R)}{k J_1(kR) H_0^{(2)}(k_0 R) - k_0 J_0(kR) H_1^{(2)}(k_0 R)}, \quad (23)$$

$$\dot{C}_0 = \dot{E}_0 \frac{J_0(kR)J_1(k_0R) - J_0(k_0R)J_1(kR)}{kJ_1(kR)H_0^{(2)}(k_0R) - k_0J_0(kR)H_1^{(2)}(k_0R)}. \quad (24)$$

Для обчислення коефіцієнтів  $\dot{B}_m$ ,  $C_m$  спочатку перетворимо рівняння (16), (22), скориставшись ортогональністю функцій  $\cos(m\varphi)$  і  $\cos(n\varphi)$ , де  $m, n \in \mathbb{Z}$  [3]. З цією метою помножимо обидві частини зазначених рівнянь на  $\cos(n\varphi)$  і проінтегруємо їх по змінній  $\varphi$  у межах від  $-\pi$  до  $+\pi$ . Отримані інтеграли будуть дорівнюють нулю для всіх  $m \neq n$ , а при  $m=n$  дадуть  $\pi$ . Завдяки даній властивості рівняння (16), (22) перетворяться до виду, що дозволяє визначити необхідні коефіцієнти:

$$\dot{B}_m = 2\dot{E}_0(j)^m k_0 \frac{J'_m(k_0R)H_m^{(2)}(k_0R) - J_m(k_0R)H_m^{(2)'}(k_0R)}{kJ'_m(kR)H_m^{(2)}(k_0R) - k_0J_m(kR)H_m^{(2)'}(k_0R)}, \quad (25)$$

$$\dot{C}_m = 2\dot{E}_0(j)^m k_0 \frac{J_m(kR)J'_m(k_0R) - kJ'_m(k_0R)J_m(kR)}{kJ'_m(kR)H_m^{(2)}(k_0R) - k_0J_m(kR)H_m^{(2)'}(k_0R)}. \quad (26)$$

У результаті визначення коефіцієнтів  $\dot{B}_m$  і  $C_m$  величини відбитих від однорідного діелектричного циліндру і тих, що пройшли усередину електромагнітних полів, однозначно визначені.

*Висновки.* Таким чином, у випадку, коли об'єкт, що опромінюється, має циліндричну форму або близьку до неї, а саме таку форму мають кінцівки сільськогосподарських тварин, нульова гармоніка проникаючого усередину поля є такою ж самою, як і падаюча плоска хвиля і складається з двох складових:  $\dot{E}_z$  і  $\dot{H}_\varphi$ . Фазові співвідношення між цими складовими визначаються розмірами біооб'єкта і частотою падаючої хвилі. Це впливає з того, що коефіцієнт  $\dot{B}_m$  (25) є комплексною величиною, причому при заданому поперечному розрізі циліндра його фаза зв'язана з частотою падаючої хвилі. Це явище викликано резонансними процесами, що відбуваються усередині тіла, що опромінюється на різних довжинах хвиль. Загальна залежність  $\dot{E}_z$  і  $\dot{H}_\varphi$  від радіуса біооб'єкта визначається функціями Бесселя і Ханкеля відповідного порядку. Отже, зміна довжини падаючої хвилі повинна привести до поперечних резонансів полів, що викликає підвищення концентрації електромагнітного впливу в пучностях внутрішнього поля.

Вплив опромінення на біооб'єкт при резонансних явищах буде неоднорідним у поперечному перерізі. Отже, підбираючи частоту, можна вибірково впливати на визначені точки, якщо це необхідно, або навпаки, зменшувати ступінь ризику їхнього ушкодження, зрушуючи пучності електромагнітного поля убік.

## Література

1. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма / Дж. А. Стрэттон. – М. : ОГИЗ, 1948. – 539 с.
2. Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн / В. В. Никольский. – М. : Наука, 1978. – 543 с.
3. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, Л. А. Самарский. – М. : Наука, 1966. – 742 с.
4. Янке Е. Специальные функции / Е.Янке, Ф. Леш. –М. : Наука, 1964. – 344 с.

**МОДЕЛЬ ТРАВМИРОВАННОЙ КОСТНОЙ ТКАНИ  
ЖИВОТНЫХ, КОТОРАЯ НАХОДИТСЯ ПОД  
ВОЗДЕЙСТВИЕМ СВЧ ИЗЛУЧЕНИЯ**

В. Ф. Яковлев, А.Н. Орел

**Аннотация** – работа посвящена теоретическому исследованию взаимодействия электромагнитного поля СВЧ - диапазона с тканями животных, с целью определения оптимальных параметров действующего поля, стимулирующего лечение костных заболеваний животных.

**MODEL OF AN INJURED OSTEAL TISSUE ANIMAL, WERE  
UNDER A VERY HIGH FREQUENCY OF RADIANCE  
EFFECT**

V. Yakovlev, A. Orel

**Summary**

The work is dedicated to analytical investigation of interaction of very high frequency range electromagnetic field with tissues animal with the purpose effecting field optimum parameters definition for challenging treatment of osteal diseases animal.