ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ, ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

УДК 514.18

МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ ІЗ ЗАДАНИМИ КУТАМИ НАХИЛУ ДОТИЧНИХ ДО ІІ ГОЛОВНИХ НАПРЯМІВ У ВСІХ КІНЦЕВИХ ТОЧКАХ

Борисенко В. Д., д-р техн. наук[1], ORCID 0000-0002-0857-0708
Устенко А. С.[2], ORCID: 0000-0002-0546-7019
Друзь Є. І.[1], ORCID: 0000-0002-9508-4045
[1]*Миколаївський національний університет імені В. О. Сухомлинського*
[2*]*Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова*
Тел (0512) 71-30-25

Анотація **– Робота присвячена геометричному моделюванню поверхонь у натуральній параметризації із застосуванням алгебраїчних (другого порядку) законів розподілу кривини вздовж головних напрямів поверхонь. Коефіцієнти законів розподілу кривини визначаються числовим методом оптимізації із забезпеченням проходження поверхні через чотири базові точки та заданими в них кутами нахилу дотичних у напрямах криволінійних координатних осей.**

Ключові слова **– геометричне моделювання, поверхня, натуральна параметризація, закон розподілу кривини.**

Постановка проблеми. В багатьох практичних застосуваннях, наприклад, в судно- та турбобудуванні, є потреба в аналітичному поданні ділянок поверхонь на базі розробленого проектантом виробу сітчастого каркасу з відомими координатами вузлів сіток та кутами нахилу в них дотичних. Наявність аналітичного виразу ділянки поверхні дозволяє будувати на них проміжні лінії, які необхідні, наприклад, для виготовлення технологічної оснастки. В світі висловленого розробка методу подання поверхні на базі відомих координат чотирьох точок і кутів нахилу в них дотичних в напрямах координатних осьових ліній.

Формулювання цілей статті. Метою цієї статті є розробка методу геометричного моделювання ділянки поверхні в натуральній параметризації із застосуванням алгебраїчних (другого порядку) законів розподілу кривини вздовж головних напрямів поверхні та зазначених вище вихідних даних.

Аналіз останніх досліджень. У сучасній літературі з прикладної геометрії можна знайти достатньо різноманітних методів геометричного моделювання поверхонь, у тому числі складених [1–6]. При цьому застосовуються явні, неявні, параметричні форми подання поверхонь. Останніми роками набули популярності методи моделювання поверхонь в натуральній параметризації.

Основна частина. Розглянемо моделювання ділянки поверхні, показаної на рис. 1, на якому визначені чотири точки та кути нахилу дотичних в обох напрямах криволінійних координат.

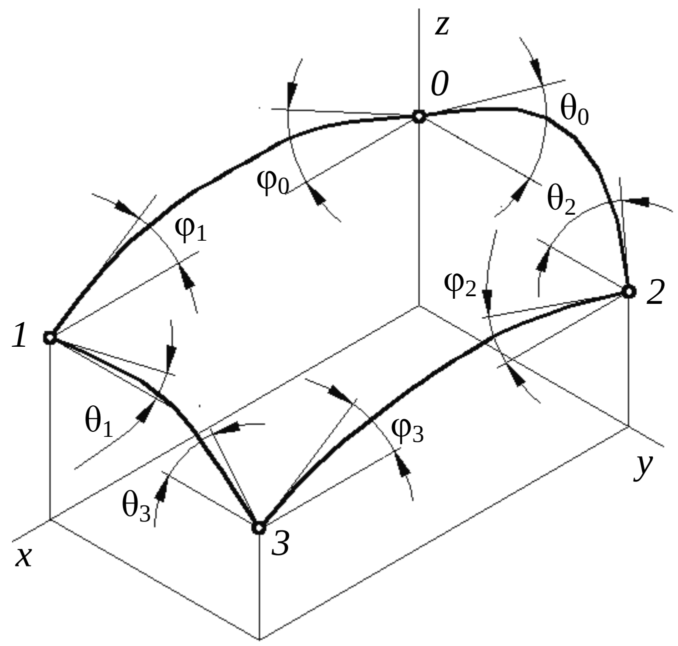

Рис. 1. Вихідні дані до моделювання ділянки поверхні

Введення до розгляду чотирьох кутів φ_2, φ_3, θ_1 і θ_3, потребувало відповідного збільшення коефіцієнтів рівнянь, якими описуються залежності кривини від криволінійних координат *u* і *v*:

$$k_1 = a_1u^2 + b_1v^2 + c_1u + d_1v + e_1uv + f_1;$$

$$k_2 = a_2u^2 + b_2v^2 + c_2u + d_2v + e_2uv + f_2.$$

Обидві залежності кривини від криволінійних координат є алгебраїчними кривими другого порядку у повному обсязі.

Інтегруванням цих залежностей отримаємо вирази, за якими будуть розподілятися кути φ і θ вздовж відповідних криволінійних координат:

$$\varphi = \varphi_{02} + \frac{a_1u^3}{3} + b_1uv^2 + \frac{c_1u^2}{2} + d_1uv + \frac{e_1u^2v}{2} + f_1u;$$

$$\theta = \theta_{01} + a_2 u^2 v + \frac{b_2 v^3}{3} + c_2 uv + \frac{d_2 v^2}{2} + \frac{e_2 uv^2}{2} + f_2 v,$$

де φ_{02} і θ_{01} – кути в початку координат, який переміщується по відповідній криволінійній координатній лінії та нульовому значенні другої криволінійної координати. Індексація 02 і 01 при кутах φ і θ відповідає крайкам модельованої ділянки поверхні.

Отже, користування записаними вище виразами при розрахунках призводить до суттєвих похибок, бо вони не враховують змінність, наприклад, кута φ при переміщенні вздовж криволінійної координати v, коли координата u дорівнює нулю. А саме при цьому переміщенні кут φ_{02} змінюється від φ_0 до φ_2. Оскільки характер цієї залежності невідомий, то для забезпечення можливості проведення розрахунків приймемо, що цей кут лінійно залежить від координати v у вказаних межах.

Таким чином, будемо мати:

$$\varphi_{02} = \varphi_0 + \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{v_2} v,$$

де φ_{02} – початкове значення кута φ при $u = 0$ і варіюванні координати v від нуля до v_2; φ_0 і φ_2 – задані значення кутів в точках 0 і 2.

Подібні міркування можна зробити відносно кута θ_{01}, який при нульовому значенні координати v і варіюванні координати u в межах від нуля до u_1 змінюється від θ_0 до θ_1. Отже, можна записати

$$\theta_{01} = \theta_0 + \frac{\theta_1 - \theta_0}{u_1} u.$$

З урахуванням цих лінійних залежностей розподіл кутів φ і θ по криволінійних координатах буде визначатися виразами:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{a_1 u^3}{3} + b_1 uv^2 + \frac{c_1 u^2}{2} + d_1 uv + \frac{e_1 u^2 v}{2} + f_1 u + \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{v_2} v;$$

$$\theta = \theta_0 + a_2 u^2 v + \frac{b_2 v^3}{3} + c_2 uv + \frac{d_2 v^2}{2} + \frac{e_2 uv^2}{2} + f_2 v + \frac{\theta_1 - \theta_0}{u_1} u.$$

Визначимо кути φ_{02} і θ_{01} в точках $0 - 3$.

Точка 0, в якій $u = 0$, $v = 0$, маємо $\varphi = \varphi_0, \theta = \theta_0$.

Точка 1, в якій $u = u_1$, $v = 0$, маємо

$$\varphi = \varphi_1 = \varphi_0 + \frac{a_1 u_1^3}{3} + \frac{c_1 u_1^2}{2} + f_1 u_1.$$

Звідки випливає, що

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{a_1 u_1^3}{3} + \frac{c_1 u_1^2}{2} + f_1 u_1. \qquad (1)$$

У цій же точці отримаємо $\theta = \theta_0 + \frac{\theta_1 - \theta_0}{u_1} u_1 = \theta_1$.

Точка *2*, в якій $u = 0$, $v = v_2$, маємо $\varphi = \varphi_0 + \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{v_2} v_2 = \varphi_2$ і

$$\theta = \theta_2 = \theta_0 + \frac{b_2 v_2^3}{3} + \frac{d_2 v_2^2}{2} + f_2 v_2.$$

Звідки випливає, що

$$\theta_2 - \theta_0 = \frac{b_2 v_2^3}{3} + \frac{d_2 v_2^2}{2} + f_2 v_2. \qquad (2)$$

Точка *3*, в якій $u = u_1$, $v = v_2$, вираз для кута φ_3 набуде вигляду:

$$\varphi_3 = \varphi_0 + \frac{a_1 u_1^3}{3} + b_1 u_1 v_2^2 + \frac{c_1 u_1^2}{2} + d_1 u_1 v_2 + \frac{e_1 u_1^2 v_2}{2} + f_1 u_1 + $$
$$+ \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{v_2} v_2.$$

З урахуванням (1) будемо мати

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_0 + b_1 u_1 v_2^2 + d_1 u_1 v_2 + \frac{e_1 u_1^2 v_2}{2}. \qquad (3)$$

Аналогічні дії відносно кута θ_3 (з урахуванням (2)) призводять до результату:

$$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2 - \theta_0 + a_2 u^2 v_2^2 + c_2 u_1 v_2 + \frac{e_2 u_1 v_2^2}{2}. \qquad (4)$$

Перш за все, зазначимо, що в цьому дослідженні будемо користуватися параметричними рівняннями поверхні, отриманими в роботі [6]:

$$x(u,v) = x_0 + \int_0^u \cos\varphi(u,v)\,du; \qquad (5)$$

$$y(u,v) = y_0 + \int_0^v \cos\theta(u,v)\,dv; \qquad (6)$$

$$z(u,v) = z_0 + \int_0^u sin\varphi(u,v)du + \int_0^v sin\theta(u,v)dv. \qquad (7)$$

Задача побудови ділянки поверхні зводиться до знаходження 12 коефіцієнтів у виразах, які визначають розподіли кривини вздовж криволінійних координат u і v та їх довжин u_1 і v_2. Моделювання поверхні розв'язується за три кроки.

Крок 1. Забезпечення проходження крайки *0–1* ділянки поверхні через точку *1*, для якої криволінійна координата v дорівнює нулю і задіяними будуть координати x і z. Координата z буде розраховуватися без врахування другого інтеграла формули (7). Для побудови цієї крайки необхідно визначити коефіцієнти a_1, c_1, f_1 та криволінійну координату u_1. Решта коефіцієнтів у побудові крайки *0–1* не задіяна, оскільки криволінійна координата v має нульове значення.

З виразу (1) випливає, що

$$a_1 = \frac{3}{u_1^3}\left(\varphi_1 - \varphi_0 - \frac{c_1 u_1^2}{2} - f_1 u_1\right).$$

Коефіцієнти c_1, f_1 і координата u_1 знаходяться шляхом мінімізації відхилення проміжно отриманої точки *1* від заданої.

Крок 2. Проведення крайки *0–2* ділянки поверхні через точку *2*, для якої криволінійна координата u дорівнює нулю. З виразу (2) випливає, що

$$b_2 = \frac{3}{v_2^3}\left(\theta_2 - \theta_0 - \frac{d_2 v_2^2}{2} - f_2 v_2\right).$$

Для побудови крайки *0–2* необхідно визначити коефіцієнти d_2, f_2 закону розподілу кривини та криволінійну координату v_2. Ці невідомі знаходяться шляхом мінімізації відхилення проміжної точки від заданої точки *2*. Для крайки *0–2* будуть задіяні координати y і z. При $u = 0$ визначення координати z спрощується, оскільки при цьому значенні криволінійної координати перший інтеграл у формулі (3.5) дорівнює нулю.

Розв'язавши задачу мінімізації функції трьох змінних з цільовою функцією у вигляді відстані між точкою *2* і деякою проміжною точкою, отриманою в процесі роботи алгоритму мінімізації, визначають коефіцієнт d_2, f_2 та величину криволінійної координати v_2.

Крок 3. Забезпечення проходження ділянки поверхні через точку *3*. Для цього необхідно знайти чотири коефіцієнти d_1, e_1 і c_2, e_2, які поки що залишаються невідомими. Задача мінімізації розв'язується із застосуванням алгоритму Хука-Дживса [7].

Аксонометрична проекція змодельованої ділянки поверхні показана на рис. 2. Вона є скриншотом зображення, отриманого в результаті проведення розрахунків за допомогою спеціально розробленого комп'ютерного коду.

Більш реалістичне зображення аксонометричної проекції змодельованої поверхні наведено на рис. 3, яке отримано в середовищі Wolfram Mathematica більш потужного програмного середовища, з яким, зрозуміло, важко конкурувати.

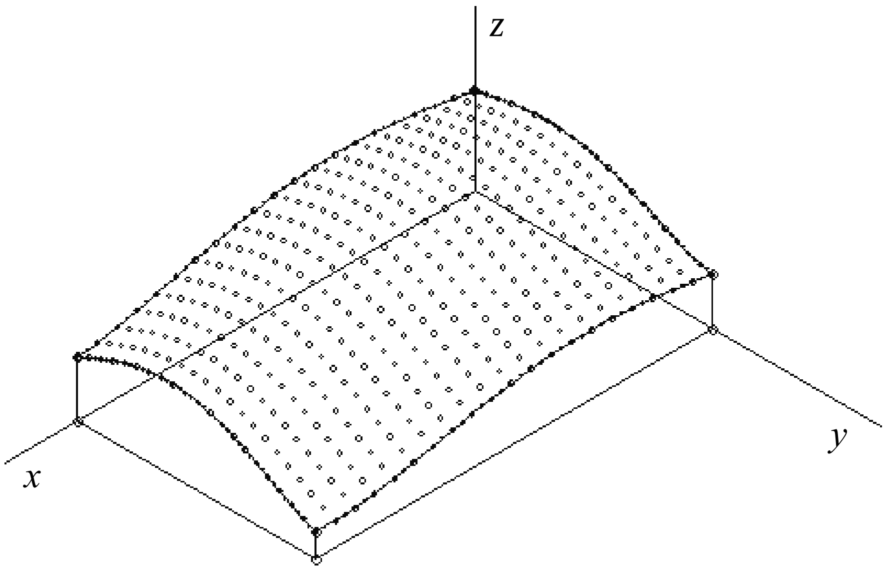

Рис. 2. Аксонометрична проекція змодельованої поверхні

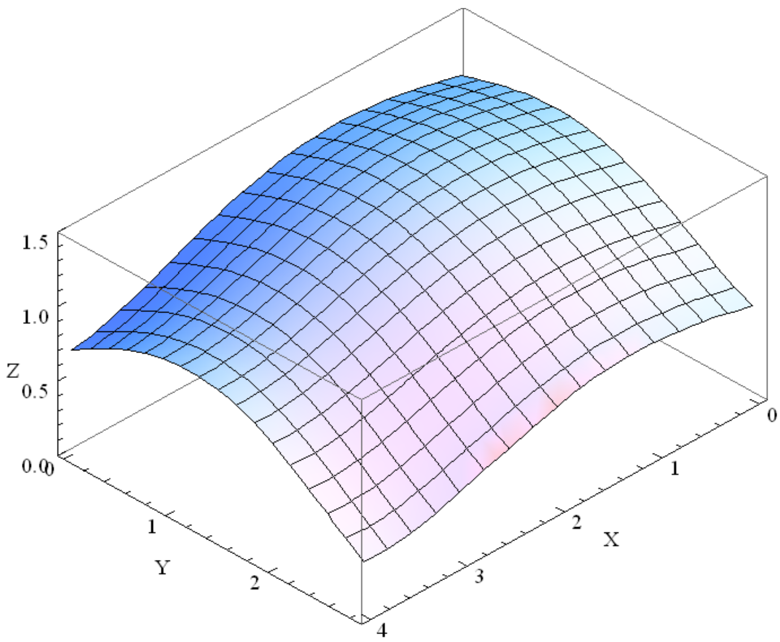

Рис. 3. Аксонометрична проекція ділянки поверхні в середовищі Wolfram Mathematica

Висновки. Запропонований метод геометричного моделювання поверхонь у натуральній параметризації із застосуванням алгебраїчних (другого степеня) законів розподілу кривини вздовж головних напрямів дозволяє забезпечити проходження поверхні через чотири базові точки та задані в них кути нахилу дотичних у напрямідвох координатних осей. Розроблений програмний код і проведені розрахунки підтвердили працездатність запропонованого методу. Подальші дослідження з геометричного моделювання поверхонь з заданими законами розподілу кривини вздовж головних їх напрямів мають бути спрямовані на розв’язання практичних питань, пов’язаних з описом складних поверхонь лопаток осьових турбін і компресорів, а також зовнішньої поверхні корпусу судна.

Література

1. *Борисенко В.Д.* Алгоритм побудови поверхонь із заданими законами розподілу кривини /В.Д.Борисенко, С.А.Устенко, О.Ю.Агарков // Збірник праць XII Міжнародної науково-практичної конференції "Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем". TAAPSD’2015. – Київ, 2015. – С. 8 – 15.
2. *Борисенко В.Д.* Складені поверхні з лінійними законами розподілу кривини /В.Д.Борисенко, С.А.Устенко, О.Ю.Агарков // Збірник праць XIII Міжнародної науково-практичної конференції "Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем". TAAPSD’2016. – Київ, 2016. – С. 30 – 34.
3. *Борисенко В.Д.* Моделювання поверхонь із заданими кутами нахилу дотичних до головних напрямів в їх кінцевих точках /В.Д.Борисенко, С.А.Устенко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 88. – С. 88–93.
4. *Иванов Г.С.* Конструирование технических поверхностей /Г.С.Иванов// – М.: Машиностроение, 1982. – 192 с.
5. *Пилипака С.Ф.* Конструювання поверхонь та їх неперервне згинання в кінцеві форми на основі управління натуральними параметрами: автореф. дис. … д-ра техн. наук: 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / Сергій Федорович Пилипака; КНУБА. – К., 2000. – 35 с.
6. *Устенко С.А.* Геометрична теорія моделювання криволінійних форм лопаткових апаратів турбомашин з оптимізацією їх параметрів: автореф. дис. … д-ра техн. наук: 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / Сергій Анатолійович Устенко; КНУБА. – К., 2013. – 40 с.
7. *Hooke R., Jeeves T.A.* Direct search solution of numerical and statistical problems // Journal of the ACM. – 1961. – Vol. 8, No 2. – P. 212–229.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ЗАДАННМИ УГЛАМИ НАКЛОНА КАСАТЕЛЬНЫХ К ЕЕ ГЛАВНЫМ НАПРАВЛЕНИЯМ ВО ВСЕХ КОНЕЧНЫХ ТОЧКАХ

Борисенко В. Д., Устенко А. С., Друзь Е. І.

Аннотация

Работа посвящена геометрическому моделированию поверхностей в натуральной параметризации с применением алгебраических (второго порядка) законов распределения кривизны вдоль главных направлений поверхностей. Коэффициенты законов распределения кривизны определяются численным методом оптимизации с обеспечением прохождения поверхности через четыре базовые точки и заданными в них углами наклона касательных в направлениях криволинейных координатных осей.

MODELING OF SURFACE WITH SPECIFIED ANGLES OF INCLINATION TO ITS MAIN DIRECTIONS AT ALL END POINTS

V. Borisenko, A. Ustenko, E. Druz

Summary

The paper is devoted to geometric modeling of surfaces in natural parametrization with the use of algebraic (second-order) laws of curvature distribution along the principal directions of surfaces. The coefficients of the laws of the distribution of curvature are determined by a numerical optimization method, ensuring that the surface passes through four base points and the slope angles of the tangents in the directions of the curvilinear coordinate axes.

By authors it is developed program and calculations which have proved work of the offered method are carried out. The subsequent researches of geometrical modelling of surfaces with the set laws of distribution of curvature along mainstreams of complex surfaces will be directed on decisions of practical problems of designing of complex surfaces.