



УДК 514.18

## ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ $\Omega$ -ПОВЕРХОНЬ В ЗАДАЧАХ ОПТИМІЗАЦІЙНОГО ПОКРИТТЯ

**Соболь О. М., д.т.н.**

*Національний університет цивільного захисту України,*

Тел. (068) 962-81-39

**Анотація** – в роботі розглянуто спосіб побудови  $\omega$ -поверхонь в задачах оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками. Дослідження властивостей  $\omega$ -поверхонь дозволило здійснити формалізацію обмежень даного класу задач.

**Ключові слова:**  $\omega$ -поверхня, оптимізаційне покриття.

*Постановка проблеми.* На теперішній час актуальною науково-прикладною проблемою є розробка нових методів обробки та оптимізаційного перетворення складної геометричної інформації для її подальшого ефективного використання. Це обумовлено тим, що із перетворенням геометричної інформації пов'язані задачі з різних галузей діяльності людини, які мають важливе теоретичне та практичне значення. Одним із перспективних напрямків досліджень в рамках зазначеної проблеми є розробка моделей та методів розв'язання задач оптимального покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками. Основним обмеженням даного класу задач є умова повного покриття заданої області, при цьому необхідно, щоб площі взаємного перетину об'єктів покриття, а також об'єктів покриття та доповнення заданої області до відповідного простору, були мінімальними. Ускладнює розв'язання даних задач те, що форма і розміри геометричних об'єктів покриття залежать від характеристик заданої області та визначаються з урахуванням місць розміщення початків локальних систем координат об'єктів покриття.

На теперішній час для формалізації обмежень в задачах оптимального покриття використовується клас  $\omega$ -функцій, введений професором С. В. Яковлевим. Разом з тим, при застосуванні об'єктів покриття зі змінними метричними характеристиками аналітичне подання  $\omega$ -функцій є надмірно громіздким, що практично унеможлиблює одержання аналітичного розв'язку відповідних задач. У зв'язку з цим, іс-



нує необхідність в дослідженні геометричних властивостей даного класу функцій в задачах оптимізаційного покриття заданих областей об'єктами зі змінними метричними характеристиками.

*Аналіз останніх досліджень.* Основні властивості класу  $\omega$ -функцій покриття наведені у роботі [1]. Постановка задачі оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками, на прикладі задачі раціонального розміщення оперативних підрозділів для захисту рухомого складу та об'єктів залізничного транспорту, наведена у роботі [2]. Модель оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками та дослідження її особливості наведено в роботах [3-4].

*Формулювання цілей статті (постановка задачі).* В даній роботі необхідно дослідити геометричні властивості  $\omega$ -функцій в задачах оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками та розробити спосіб побудови  $\omega$ -поверхонь з метою формалізації обмежень даного класу задач.

*Основна частина.* Постановка задачі оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками має наступний вигляд.

Нехай задано область покриття  $S_0$ , що являє собою, в загальному випадку, неопуклий багатозв'язний багатокутник у двовимірному просторі. Даній області належать області заборони (на розміщення початків локальних систем координат об'єктів покриття)  $S_0^v$ ,  $v=1,2,\dots,N_v$ , - компоненти зв'язності, що являють собою неопуклі багатокутники.

Необхідно покрити область  $S_0$  мінімальною кількістю геометричних об'єктів  $S_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$  (опуклі та неопуклі однозв'язні багатокутники, кола), зі змінними метричними характеристиками таким чином, щоб виконувалися наступні обмеження:

- покриття всієї заданої області  $S_0$

$$S_0 \cap \left( \bigcup_{i=1}^N S_i \right) = S_0; \quad (1)$$

- мінімум площі взаємного перетину геометричних об'єктів  $S_i$

$$S_i \cap S_j \rightarrow \min; \quad i=1,2,\dots,N; \quad j=i+1,\dots,N; \quad (2)$$

- мінімум площі перетину об'єктів  $S_i$  з областями заборони  $S_0^v$

$$S_i \cap S_0^v \rightarrow \min; \quad i=1,2,\dots,N; \quad v=1,2,\dots,N_v; \quad (3)$$



- належність об'єктів  $S_i$  області  $S_0$

$$cS_0 \cap S_i \rightarrow \min ; i = 1, 2, \dots, N ; cS_0 \cup S_0 = R^2 ; \quad (4)$$

- спеціальні умови, що формують об'єкти покриття

$$p_i \in F_i(S_0) ; i = 1, 2, \dots, N ; \quad (5)$$

де  $F_i(S_0)$  - множина форм і розмірів  $i$ -го об'єкта покриття.

Як було зазначено вище, для формалізації обмежень (1)÷(4) використовується клас  $\omega$ -функцій. Для розробки моделі та обґрунтованого метода розв'язання задачі оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками необхідно зрозуміти, що являють собою умови оптимального покриття з геометричної точки зору, особливо за умови складності аналітичного подання  $\omega$ -функцій для зазначених об'єктів покриття. У зв'язку з цим, розглянемо наступні твердження та визначення.

*Твердження.1.*  $\omega$ -функція  $\omega_\Omega(p_1; \dots; p_N; x_1, y_1; \dots; x_N, y_N) = 0$ , в загальному випадку, утворює  $\omega$ -гіперповерхню у просторі

$R^{2N+1+2\sum_{i=1}^N n_i}$ , де  $n_i$  - кількість вершин  $i$ -го багатокутника покриття;  $p_i$  - координати вершин  $i$ -го об'єкта покриття;  $(x_i, y_i)$  - координати початку локальної системи координат  $i$ -го об'єкта покриття в глобальній системі координат;  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Аналогічні твердження можна зробити для кіл, а також для кіл і багатокутників.

*Приклад.* Розглянемо  $\omega$ -функцію для двох прямокутників  $S_1(a_1, b_1)$  та  $S_2(a_2, b_2)$ :  $\omega_\Omega(a_1, b_1; a_2, b_2; x_1, y_1; x_2, y_2) = 0$ . В даному випадку  $\omega$ -функція утворює гіперповерхню у просторі  $R^9$  (розмірність простору відповідає кількості параметрів  $\omega$ -функції).

*Властивість 1.* Розглянемо  $\omega$ -функцію для двох геометричних об'єктів  $S_1$  та  $S_2$   $\omega_\Omega(p_1; p_2; x_1, y_1; x_2, y_2) = 0$ . При фіксації координат вершин обох об'єктів відносно їх локальних систем координат та початку локальної системи координат об'єкта  $S_1$  можна отримати тривимірну проекцію  $\omega$ -гіперповерхні  $\omega_\Omega(p_2) = \omega_\Omega(x_2, y_2)$ .

*Визначення 1.* Множину точок, координати яких задовольняють рівнянню  $\omega_\Omega(p_2) = \omega_\Omega(x_2, y_2)$  назовемо  $\omega$ -поверхнею.

В даній роботі запропоновано спосіб комп'ютерного моделювання  $\omega$ -поверхонь. Для цього розглянемо побудову даних поверхонь

на прикладі взаємодії двох прямокутників  $S_1$  та  $S_2$  зі змінними метричними характеристиками.

Зазначений спосіб полягає в тому, що координати вершин обох прямокутників фіксуються у визначений момент часу, при цьому також фіксується положення локальної системи координат прямокутника  $S_1$ . В подальшому здійснюється комп'ютерне моделювання  $\omega$ -поверхні, яку отримують у дискретному вигляді шляхом обчислення значень  $\omega$ -функції при кожній зміні положення прямокутника  $S_2$ . Надалі відбувається зміна параметрів прямокутника  $S_2$  та відбувається побудова наступної  $\omega$ -поверхні. Таким чином, реалізація запропонованого способу дозволить отримати набір  $\omega$ -поверхонь, що можуть у подальшому бути використані для представлення обмежень та оптимізації цільової функції в задачі покриття заданої області геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.

Для побудови  $\omega$ -поверхонь було розроблене алгоритмічне та програмне забезпечення. Розглянемо побудову  $\omega$ -поверхні при трансляції прямокутника  $S_2$  відносно прямокутника  $S_1$ . Нехай дані прямокутники мають наступні параметри:  $a_1 = 7$ ;  $b_1 = 3$ ;  $a_2 = 5$ ;  $b_2 = 2$ . Тоді  $\omega$ -поверхня буде мати вигляд, що наведений на рис. 1.

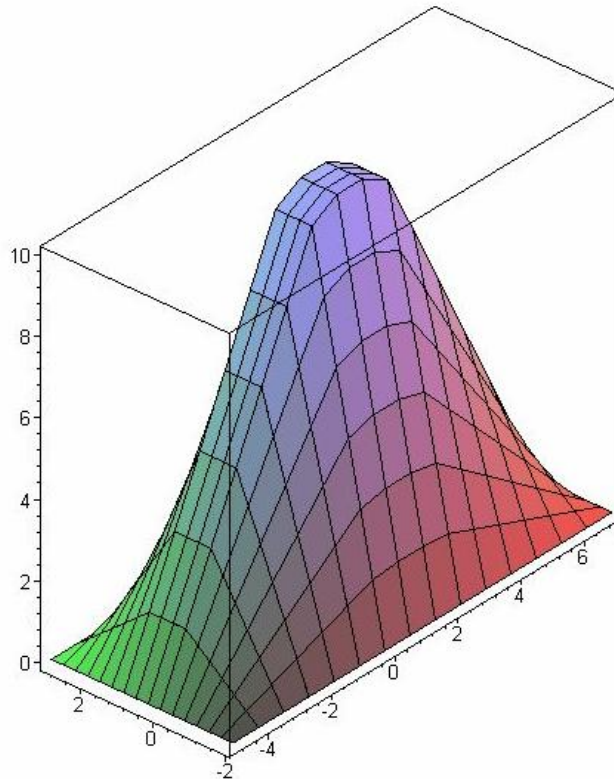


Рис. 1.  $\omega$ -поверхня для двох прямокутників

Зафіксуємо параметри прямокутника  $S_1$ , при цьому розміри прямокутника  $S_2$  будуть змінюватись. Це призведе до перетворень  $\omega$ -поверхні, що наведені на рис. 2 – 5.

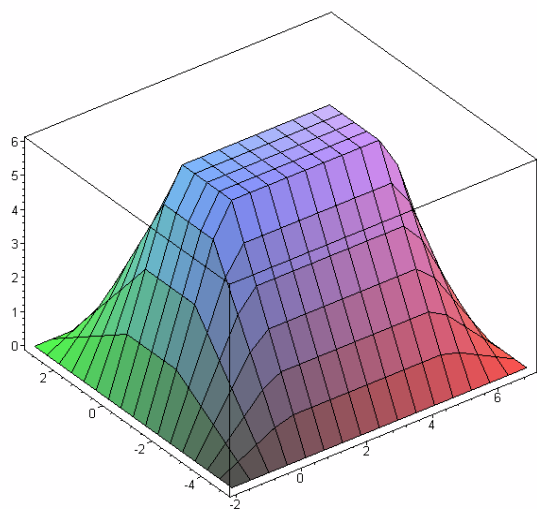


Рис. 2.  $\omega$ -поверхня  
( $a_2 = 2, b_2 = 5$ )

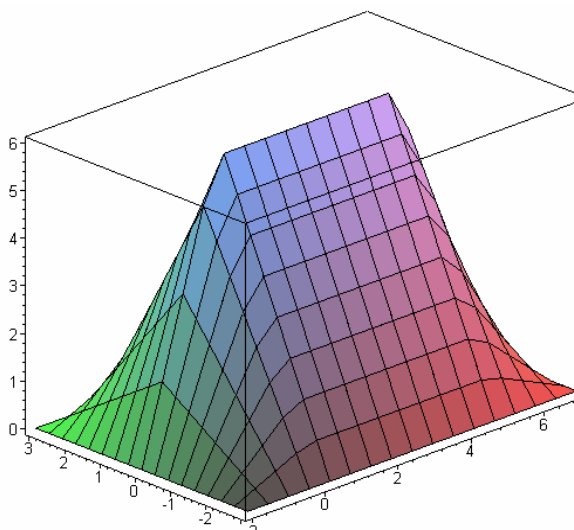


Рис. 3.  $\omega$ -поверхня  
( $a_2 = 2, b_2 = 3$ )

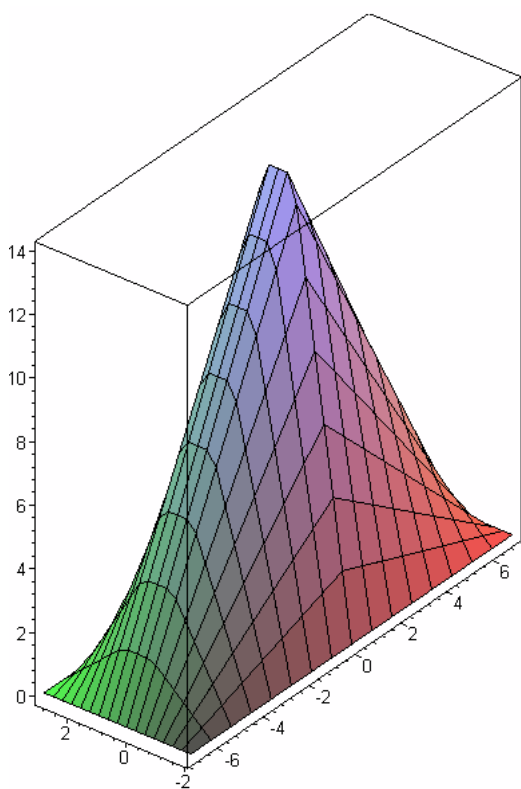


Рис. 4.  $\omega$ -поверхня  
( $a_2 = 7, b_2 = 2$ )

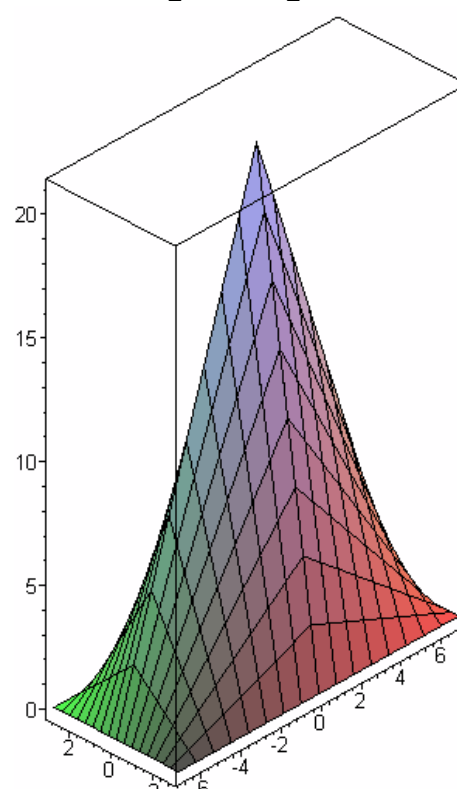


Рис. 5.  $\omega$ -поверхня  
( $a_2 = 7, b_2 = 3$ )

Дослідження  $\omega$ -поверхонь дозволило сформулювати твердження та виявити основні їх властивості.



*Твердження 2.* Контур, що може бути отриманий шляхом перетину  $\omega$ -поверхні для об'єктів  $S_1$  та  $S_2$  з площиною  $xOy$ , являє собою 0-рівень Ф-функції [1] для зазначених об'єктів.

*Твердження 3.*  $\omega$ -поверхня для геометричних об'єктів  $S_1$  та  $S_2$  зі змінними метричними характеристиками являє собою об'єднання фрагментів поверхонь, що можуть бути отримані під час кожної зміни координат вершин (радіусів) відповідних об'єктів (приклад: для прямокутників  $S_1$  та  $S_2$   $\omega$ -поверхня являє собою об'єднання фрагментів поверхонь, що наведені на рис. 1 – 5).

Виходячи з твердження 3, можна сформулювати наступну властивість.

*Властивість 2.*  $\omega$ -поверхня для геометричних об'єктів  $S_1$  та  $S_2$  зі змінними метричними характеристиками, в загальному випадку, є незв'язною.

*Висновки.* В даній роботі розроблено спосіб комп'ютерного моделювання  $\omega$ -поверхонь в задачах оптимізаційного покриття геометричних об'єктів. Використання даного класу поверхонь є доцільним у зв'язку із складністю аналітичного подання  $\omega$ -функцій для геометричних об'єктів зі змінними метричними характеристиками. Досліджені геометричні властивості  $\omega$ -поверхонь дозволили формалізувати обмеження та розробити ефективний та обґрунтований метод розв'язання задачі оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.

#### *Література*

1. Стоян Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. – К.: Наукова думка, 1986. – 268 с.
2. Комяк В.М. Постановка задачі раціонального розміщення оперативних підрозділів для захисту рухомого складу та об'єктів залізничного транспорту / В.М. Комяк, О.М. Соболев, В.О. Собина // Проблеми надзвичайних ситуацій. Зб. наук. пр. УЦЗ України. – Харків: УЦЗУ, 2009. – Вип.9. – с. 56-62.
3. Комяк В.М. Загальна математична модель раціонального розміщення оперативних підрозділів для захисту рухомого складу та об'єктів залізниці / В.М. Комяк, О.М. Соболев, В.О. Собина // Вестник Херсонського національного технічного університету. – Херсон, 2009. – Вып. 2(35). – с. 241-246.
4. Комяк В.М. Особливості загальної математичної моделі визначення раціональної кількості та місць розташування оперативних підрозділів для захисту об'єктів залізниці / В.М. Комяк, О.М. Соболев, А.Г. Коссе,



*В.О. Собина* // Проблеми надзвичайних ситуацій. Зб. наук. пр. УЦЗ України. – Харків: УЦЗУ, 2009. – Вип.10. – с. 106-111.

## **ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ $\Omega$ -ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИОННОГО ПОКРЫТИЯ**

А.Н. Соболев

*Аннотация* – в работе рассмотрен способ построения  $\omega$ -поверхностей в задачах оптимизационного покрытия заданных областей геометрическими объектами с переменными метрическими характеристиками. Исследование свойств  $\omega$ -поверхностей позволило формализовать ограничения данного класса задач.

## **GEOMETRIC MODELING $\Omega$ -SURFACES IN PROBLEMS OF OPTIMIZATION COVERING**

O.M. Sobol

### *Summary*

The paper considers a method for constructing  $\omega$ -surfaces in problems of optimization covering defined areas by geometric objects with variable metric characteristics. Research the properties of  $\omega$ -surfaces allows to formalize restrictions in the class of problems.