

**ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРИЯ, ИНЖЕНЕРНА ГРАФИКА**

УДК 514.18

**ВАРИАТИВНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИВЫХ С
ЗАКОНОМЕРНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК****Гавриленко Е. А., к.т.н.,****Холодняк Ю. В., ****Таврический государственный агротехнологический университет*

Тел. (0619) 42-68-62

Аннотация – в работе рассматривается задача формирования одномерных обводов с закономерным изменением кривизны и кручения. Методика основана на формировании кривой по отдельным монотонным участкам, с последующей их стыковкой.

Ключевые слова: дискретно представленная кривая, тетраэдр расположения кривой, кривизна, кручение.

Постановка проблемы. Модель поверхности сложной формы, как правило, формируется на основе каркаса, элементами которого являются плоские и пространственные кривые линии. Задача обеспечения заданных функциональных свойств таких поверхностей требует разработки методов формирования линейных элементов модели в виде одномерных обводов с заданными дифференциально-геометрическими характеристиками. Для пространственных линий этими характеристиками являются порядок фиксации и порядок гладкости обвода, динамика изменения значений кривизны и кручения вдоль кривой.

Анализ последних исследований. Из методов непрерывного геометрического моделирования широкое применение получило формирование сложных геометрических образов на основе В-сплайнов [1]. В-сплайн определяется задающими точками, каждой из которых соответствует функция сопряжения. Дискретный характер исходных данных обеспечивает гибкость управления формой кривой. Порядок гладкости обвода обеспечивается степенью функций сопряжения. При увеличении порядка гладкости снижается возможность локальной



коррекции кривой. Одновременно возрастает вероятность возникновения осцилляций. Эти особенности ограничивают возможности обеспечения заданных характеристик обводов, формируемых на основе В-сплайнов.

Дискретное геометрическое моделирование предполагает задание поверхности исходным точечным массивом, а линейных элементов модели – точечным рядом. Кривую линию, представленную упорядоченным множеством принадлежащих ей точек, будем называть дискретно представленной кривой или ДПК. Кроме исходного точечного ряда в определитель ДПК входят её дифференциально-геометрические характеристики. Эти характеристики обеспечиваются в процессе моделирования. ДПК формируется методом дискретной интерполяции или сгущения, предполагающего определение положения промежуточных точек для исходного точечного ряда [2]. При этом полагаем, что исходные точки заданы без погрешности и в процессе моделирования не изменяют своего положения.

Формулировка целей статьи. Задачей исследования является разработка способа формирования ДПК с обеспечением заданных геометрических свойств.

Основная часть. В процессе моделирования дифференциально-геометрические характеристики кривой будем оценивать с помощью их дискретных аналогов, которые будем называть дискретными характеристиками.

Хорду сопровождающей ломаной линии (СЛЛ) будем рассматривать как приближенное положение касательной прямой. Дискретная характеристика, соответствующая соприкасающейся плоскости – плоскость, проходящая через три последовательные точки ДПК. Такую плоскость будем называть прилегающей. Радиус кривизны в точке ДПК будем оценивать радиусом прилегающей окружности, определяемой этой точкой и ближайшими предыдущей и последующей точками ряда. В качестве дискретного кручения будем использовать величину отношения угла между смежными прилегающими плоскостями к длине соответствующей хорды СЛЛ.

Необходимым условием формирования дифференциально-геометрических характеристик обвода являются закономерное изменение значений дискретных характеристик и существование предела, к которому в процессе последовательных сгущений стремятся их значения. Такой характер изменения значений дискретных характеристик обеспечивает алгоритм сгущения. Таким образом, дискретная геометрическая модель кривой состоит из точечного ряда, дискретных характеристик и алгоритма сгущения.

Основными характеристиками обводов, формируемых нашими методами, являются второй порядок гладкости и закономерное изме-

нение значений кривизны и кручения.

Под ДПК второго порядка гладкости будем понимать кривую линию, представленную точечным рядом, алгоритм сгущения которого обеспечивает выполнение следующих условий.

1. В процессе последовательных сгущений угол между хордами СЛЛ, ограниченными i -й точкой ДПК и ближайшими предыдущей и последующей точками стремится к нулю.

2. Прилегающие плоскости, одна из которых определяется точкой i и двумя ближайшими предыдущими точками ряда, а другая – точкой i и двумя ближайшими последующими точками ряда, в процессе последовательных сгущений стремятся занять положение i -й прилегающей плоскости, определяемой точкой i , ближайшей предыдущей и последующей точками.

3. Величина отношения угла между i -й и предыдущей прилегающими плоскостями к длине хорды СЛЛ, расположенной на прямой пересечения указанных плоскостей, стремится к значению аналогичного соотношения, определяемого i -й и последующей прилегающими плоскостями.

4. Радиусы трёх окружностей, проходящих через точку i и две ближайшие предыдущие, последующие, предыдущую и последующую точки ряда стремятся к одному значению.

В результате последовательных сгущений, в пределе, получим непрерывное однопараметрическое множество точек, в каждой точке которого выполнение условий 1 и 2 обеспечивает единственное положение основного трёхгранника, а выполнение условий 3 и 4 обеспечивает единственное значение кручения и кривизны.

Пространственная ДПК формируется сгущением упорядоченного множества точек. Каждые три последовательные точки исходного ряда определяют плоскость (рис. 1).

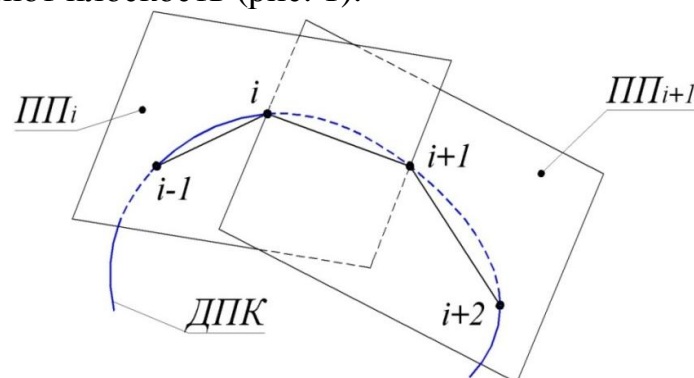


Рис. 1. Расположение прилегающих плоскостей

Будем называть эти плоскости прилегающими ($ПП_i$ – плоскость, проходящая через точки $i-1, i, i+1$). Потребуем, чтобы величина двугранного угла, ограниченного смежными $ПП$ (φ_i), внутри которого

расположен участок ДПК, не превышала 180° . Тогда направление поворота $\Pi\Pi_i$ на угол φ_i вокруг прямой её пересечения с последующей $\Pi\Pi_{i+1}$ (прямая $(i, i+1)$), в результате которого $\Pi\Pi_i$ и $\Pi\Pi_{i+1}$ совпадают, соответствует направлению хода ДПК. ДПК разбивается на участки правого и левого хода и формируется отдельно, по этим участкам.

Касательные к ДПК постоянного хода в исходных точках (t_i) располагаются внутри двух смежных двугранных углов φ_{i-1} и φ_i одновременно (рис. 2).

Касательная к ДПК t_i определяет положение плоскостей касательных с ДПК в точке i и проходящих через соседние исходные точки $-i-1$ и $i+1$.

Плоскости, касательные с ДПК в соседних исходных точках, образуют двугранный угол ψ_i , являющийся областью расположения ДПК постоянного хода (рис. 2). Плоскости касательные с ДПК в одной точке ограничивают область возможного расположения соприкасающейся плоскости ДПК в точке i (СП_i). СП_i назначается внутри двугранного угла ω_i .

Соприкасающиеся и касательные плоскости в двух соседних точках ограничивают тетраэдр.

Этот тетраэдр является областью возможного расположения ДПК постоянного хода с заданными в исходных точках основными трёхгранниками. Точка сгущения (i_{cc}) назначается внутри тетраэдра расположения ДПК. Для неё, внутри соответствующих диапазонов, назначается положение касательной прямой и соприкасающейся плоскости. В результате, на каждом участке получаем два новых тетраэдра.

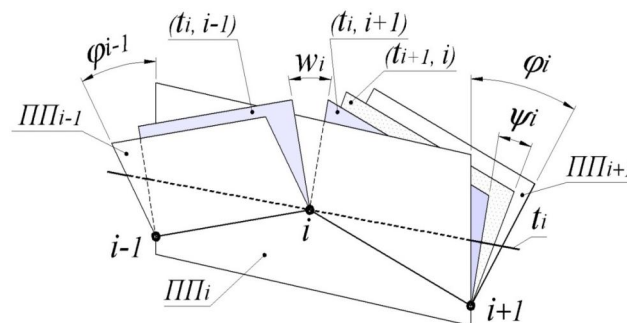


Рис. 2. Определение положения касательных прямых и плоскостей

Назначение касательных прямых, соприкасающихся плоскостей и точек сгущения внутри соответствующих диапазонов обеспечивает первый порядок гладкости, формируемого обвода.

При формировании обвода второго порядка гладкости, значения кручения и радиусов кривизны оцениваются с помощью их дискретных аналогов.

Значения радиуса кривизны в i -й точке ДПК оценивается радиусами прилегающей и касательных окружностей. i -я прилегающая ок-



ружность определяется точкой i и ближайшими предыдущей и последующей точками ДПК. i -я касательная окружность определяется точкой i , касательной прямой в этой точке и ближайшей точкой ДПК.

Среднюю величину кручения на i -м участке ДПК, в узлах которой определено положение касательных прямых, можно оценить значением:

$$B_i^{\varphi} = \frac{\psi_i}{h_i},$$

где $h_i = |i; i + 1|$ – длина хорды сопровождающей ломаной линии.

Касательные плоскости определяют в точках ДПК как значение дискретного кручения, так и радиусы касательных окружностей. Их положение назначается исходя из условия закономерного изменения дискретных характеристик.

Разработанные алгоритмы обеспечивают наличие в точках ДПК диапазонов возможных, по условиям задачи, значений кривизны и кручения и последовательное схождение этих диапазонов к единственному значению.

В результате проведенных исследований предложен алгоритм вариативного дискретного геометрического моделирования гладкой кривой. Основой алгоритма является анализ исходного точечного ряда, в результате которого определяется область возможного расположения кривой и диапазоны возможных значений ее геометрических характеристик. Назначенные характеристики уточняют область расположения кривой. Значения характеристик обеспечиваются в процессе последовательных сгущений точечного ряда.

ДПК могут формироваться на основе любого точечного ряда. При этом существует возможность пошагового контроля и коррекции получаемого решения, наложения на него дополнительных условий, а также гарантируется отсутствие осцилляций.

Выводы. Дальнейшее развитие методов вариативного дискретного геометрического моделирования направлено на повышение их универсальности и возможностей адаптации под требования конкретных прикладных задач. Такая задача может быть решена наращиванием условий, накладываемых на конструируемый обвод за счёт увеличения числа параметров формообразования.

Основной сферой использования методов является моделирование поверхностей с повышенными динамическими качествами, ограничивающих изделия, функциональное назначение которых – взаимодействие со средой. Наибольший эффект может быть получен при решении задач, требующих достижения компромисса между функциональными качествами поверхности и дополнительными требованиями компоновки, эстетики, комфортабельности.



Практическое внедрение методов предполагает разработку, на их основе, программных модулей, совместимых с существующими САД-пакетами, такими как КОМПАС, Solid Works, AutoCAD.

Литература.

1. Ли К. Основы САПР (САД/САМ/САЕ) / Кунву Ли. – СПб.: Питер, 2004. – 560 с.
2. *Найдиш В.М.* Дискретна інтерполяція [для студентів вищих навчальних закладів III-IV рівнів акредитації] / В.М. Найдиш. – Мелітополь: Люкс, 2008. – 250 с.

**ВАРІАТИВНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КРИВИХ С ЗАКОНОМІРНОЮ
ЗМІНОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧНИХ
ХАРАКТЕРИСТИК**

Є.А. Гавриленко, Ю.В. Холодняк

У роботі розглядається задача формування одновимірних обводів с закономірною зміною кривини та скруту. Методика заснована на формуванні кривої по окремим монотонним ділянкам з наступним їх стикуванням.

**VARIATIVE MODELING OF CURVES WITH THE NATURAL
CHANGE OF DIFFERENTIAL-GEOMETRIC
CHARACTERISTICS**

E. Gavrilenko, Yu. Kholodnyak

Summary

The problem of formation of one-dimensional contours with the natural change of curvature and torsion is considered in this article. Methodology of curve's modeling includes formation of bounded monotonous plots and their subsequent docking.