УДК 620.17:582.623.2:662.63

ПРО ЗГИН ЖОРСТКО ЗАРОБЛЕНОГО ПРУТКА

Ковбаса В. П., д.т.н.,
Гридякін В. О., к.т.н.,
Матюшенко Л. М., аспірант*.
Національний університет біоресурсів і природокористування України,
Тел.: 0445278895;
Глухівський Національний педагогічний університет імені Олександра Довженка,
Тел.: 0544422651.

Анотація **– викладені результати досліджень визначення лінії прогину прутка і розподілу напружень у довільному перерізі прутка. В результаті було визначено силу, яку необхідно прикласти для отримання певного прогину або напруженого стану в перетинах прутка змінного перерізу з певними пружними постійними. Отримані нами результати можуть бути використані при вирішенні завдань пов'язаних з експлуатацією, що полягає в проектуванні робочих органів сільськогосподарських, лісогосподарських та інших машин.**

Ключові слова **– згин стержня, деформація, лінія прогину, розподілення напружень.**

Постановка проблеми. У багатьох задачах, які вирішуються в галузях механізації сільського господарства та сільськогосподарського машинобудування виникають задачі про прогин жорстко закробленого стрижня зі змінним перетином по висоті, причому із різним по геометрії перетином. Однією з таких задач є відхилення рослини при дії переміщення (кінематичні початкові умови) і під дією сили (динамічні початкові умови). Відомі з опору матеріалів рішення [1] можна застосовувати лише для випадку невеликих зміщень і не можуть застосовуватися для аналізу відхилення стрижня, оскільки в таких задачах спостерігається значний по величині прогин. Відомі рішення про великі прогини тонких стрижнів [2], але в цих задачах не розглядаються напружено-деформований стан в самих стрижнях. Тому, аналіз, який приводиться тут, може бути актуальним для фахівців.

---

* Науковий керівник – д.т.н., профессор Ковбаса В. П.

Аналіз останніх досліджень. Для вирішення поставленого завдання вивчалися відхилення рослини при дії переміщення і під дією сили з використанням напівзворотнього методу Сен-Венана. Він полягає в тому, що робиться припущення про вигляд деяких функцій напружень або переміщень.

Постановка завдання. Визначити залежність лінії прогину прутка. Визначити залежність розподілу напружень в довільному перерізі прутка, що дозволить визначити силу, яку необхідно прикласти для отримання певного прогину або напруженого стану в перетинах прутка змінного перерізу з певними пружними постійними.

Основна частина. Приймемо деякі припущення про розподіл напружень. Припустимо, що нормальна напруга в деякому перетині на відстані x від точки зароблення розподіляється таким же чином, що і у випадку чистого згину:

$$\sigma_x = -\frac{P(h-x)z}{J}, \tag{1}$$

J – момент інерції перерізу, який залежить від x.

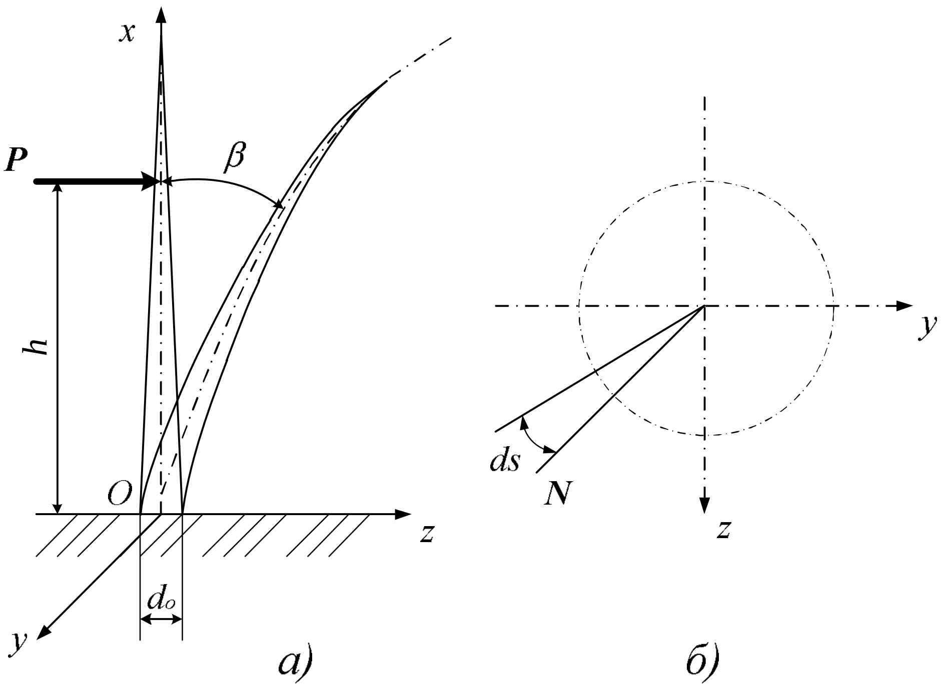


Рис.1. Розрахункова схема згину прутка (а), перетин прутка (б).

Припустимо, що в тих же поперечних перетинах діють дотичні напруження $\tau_{xy,}\tau_{xz}$. Припустимо, що інші три компоненти напружень $\{\sigma_z, \sigma_y, \tau_{yz}\} = 0$.

При таких припущеннях розподіл навантаження P при $x = h$ і реакції в перетині $x = 0$ повинні задовольняти всі рівняння динаміки теорії пружності [3].

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X=0;$$
$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y=0;$$
$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0,$$

де X,Y,Z – об'ємні сили.

При прийнятих припущеннях $\{\sigma_y=\sigma_z=\tau_{yz}\}=0$, і нехтуючи об'ємними силами $X=Y=Z=0$, рівняння рівноваги (динаміки) приймуть вигляд:

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}=-\frac{P\,z}{J}; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=0;\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}=0; \qquad (3)$$

Групу рівнянь (2) і (3) позначимо (а). Із рівняння (3) видно, що дотичні напруження не залежать від x.

Звернемося до умов на поверхні (граничні умови) [4]:

$$\begin{aligned}&\sigma_x l+\tau_{xy}m+\tau_{xz}n=\overline{X};\\&\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{xz}n=\overline{Y};\\&\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n=\overline{Z},\end{aligned} \qquad (4)$$

де $\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}$ – поверхневі сили,

l,m,n – направляючі косинуси зовнішньої нормалі до поверхні прутка.

Враховуючи те, що бокова поверхня прутка вільна від зовнішніх сил і те, що $\{\sigma_y=\sigma_z=\tau_{yz}\}=0$, приходимо до того, що з (4) залишається одне рівняння:

$$\tau_{xy}m+\tau_{xz}n=0. \qquad (б)$$

Із рисунка 1б напрямні косинуси можуть бути представлені наступним чином:

$$m=\cos N\hat{y}=\frac{dz}{ds};n=\cos N\hat{z}=-\frac{dy}{ds},$$

де ds – елемент кривої, який обмежує поперечний переріз.

Тоді умова на поверхні прийме вигляд:

$$\tau_{xy}\frac{dy}{ds}-\tau_{xz}\frac{dz}{ds}=0 \qquad (в)$$

Розглянемо рівняння сумісності в напруженнях [4]:

$$\begin{gathered}(1+\nu)\Delta\sigma_x+\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=0;(1+\nu)\Delta\sigma_y+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=0;(1+\nu)\Delta\sigma_z+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=0;\\ (1+\nu)\Delta\tau_{xy}+\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}=0;(1+\nu)\Delta\tau_{xz}+\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z}=0;(1+\nu)\Delta\tau_{yz}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z}=0,\end{gathered} \qquad (5)$$

де $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, $\theta=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$.

У рівняннях (5) перші три, які містять нормальні компоненти напружень, задовольняються тотожно, аналогічно останнє, що містить τ_{yz}, також задовольняється тотожно. Тоді залишаються два рівняння:

$$\Delta\tau_{yz}=0;\Delta\tau_{xz}=-\frac{P}{J(1+\nu)}. \qquad (г)$$

Через функцію напружень $\varphi(y,z)$ (у плоскій постановці - функція Ері) компоненти напружень виражаються залежностями:

$$\sigma_z=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2};\sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2};\tau_{yz}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}. \qquad (6)$$

Враховуючи те, що $\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y\partial z}$, а також (6), рівняння (2) і (3) групи (а) (після інтегрування по x) приймуть вигляд:

$$\tau_{xz}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{Pz^2}{J}+f(y);\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\tau_{xy}, \qquad (7)$$

де $f(y)$ – функція, яка залежить від y і повинна бути визначена із початкових умов.

Підставляючи (7) у рівняння сумісності (г) виходить:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)=0;\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)=\frac{P}{(1+\nu)J}-\frac{d^2f}{dy^2}.\end{gathered} \qquad (8)$$

Або

$$\begin{gathered}\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial z\partial y^2}=0;\\ \frac{\partial^3\varphi}{\partial y\partial z^2}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}=\frac{P}{(1+\nu)J}-\frac{d^2f}{dy^2}.\end{gathered}$$

Інтегруючи останнє із (8) по y виходить:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{Py}{(1+\nu)J}-\frac{df}{dy}+c, \tag{9}$$

де c – постійна інтегрування, яка може бути отримана з аналізу обертання елементарної площадки в площині поперечного перерізу прутка, тобто в площині YOZ.

Обертання навколо осі OX визначиться залежністю:

$$w_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\right).$$

Похідна від кута повороту в напрямку осі прутка x можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x\partial z}\right).$$

Якщо додати до двох складових останнього виразу $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$, тоді

$$\frac{\partial(2w_x)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}.$$

Використовуючи закон Гука для деформацій зсуву $\gamma_{ij}=\dfrac{1}{G}\tau_{ij}$, можна записати функцію обертання в наступному вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial x}(2w_x)=\frac{1}{G}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}\right),$$

а, враховуючи рівняння (7), із урахуванням того, що $-\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ можна отримати: $\dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial f}{\partial y}$, тоді

$$\frac{\partial}{\partial x}(2w_x)=\frac{1}{G}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial f(y)}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right),$$

або $G\dfrac{\partial}{\partial x}(2w_x)-\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$.

Після підстановки останнього виразу в (9), виходить:

$$G\frac{\partial}{\partial x}(2w_x)=\frac{P}{(1+\nu)J}+c. \tag{10}$$

Якщо z – вісь симетрії поперечного перерізу прутка, який згинається під дією сили P, то поле обертання w_x елементів поперечного перерізу відповідає від'ємній кривизні, при цьому середнє значення для всього поперечного перерізу дорівнює нулю. Тоді середнє значення $\frac{\partial w_x}{\partial x}$ також має дорівнювати нулю. У цьому випадку постійна інтегрування c в рівності (10) також повинна дорівнювати нулю.

При $c=0$, рівняння (9) прийме вигляд:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{Py}{(1+v)J}-\frac{\partial f}{\partial y}. \qquad (11)$$

Підставляючи (7) в граничні умови (в) можна знайти $\tau_{xy}\frac{\partial z}{\partial s}-\tau_{xz}\frac{\partial y}{\partial s}=0$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\left(\frac{P\,z^2}{2J}-f(y)\right)\left(\frac{dy}{ds}\right). \qquad (12)$$

Якщо задати функцію $f(y)$, то із рівняння (11) можна визначити значення φ вздовж контуру поперечного перерізу.

У разі круглого поперечного перерізу, що відповідає перетину стебла, рівняння контуру буде мати вигляд:

$$y^2+z^2=r^2, \qquad (13)$$

де – радіус перетину прутка.

Права частина рівняння (12) буде дорівнювати нулю, якщо прийняти, що $f(y)=\frac{P}{2J}(r^2-y^2)$. Підставляючи цей вираз в (11), можна отримати для функції φ наступний вираз:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial\varphi^2}{\partial y^2}=\frac{P\,y}{(1+v)J}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{2J}\left(r^2-y^2\right)\right)=\frac{P\,y}{(1+v)J}+\frac{P\,y}{J}=\frac{(2+v)P\,y}{(1+v)J}, \qquad (14)$$

для якого на контурі прутка $\varphi=0$.

Таким чином, функція напруги визначається поперечним навантаженням, інтенсивність якого пропорційна $\frac{(2+v)P\,y}{(1+v)J}$.

Рівняння (14) і граничні умови (13) задовольняються в тому випадку, якщо $\varphi=m(z^2+y^2-r^2)y$. (15)

При цьому $m=\frac{2+vP}{8(1+v)I}$, тоді рівняння (15) прийме вигляд:

$$\varphi=\frac{(2+v)P}{8(1+v)J}(z^2+y^2-r^2)y.$$

Таким чином, визначена невідома потенційна функція φ.

При відомій функції φ за допомогою рівняння (7) визначаються невідомі компоненти дотичних напружень:

$$\tau_{xz} = \frac{P(-y^2(-2+\nu)+r^2(2+3\nu)-z^2(2+3\nu))}{8J(1+\nu)};$$
$$\tau_{xy} = \frac{Py\,z(2+\nu)}{4J(1+\nu)};\ \sigma x = \frac{-P(h-x)z}{J}. \qquad (16)$$

Графічно залежності (16) проілюстровані на рисунку 2.

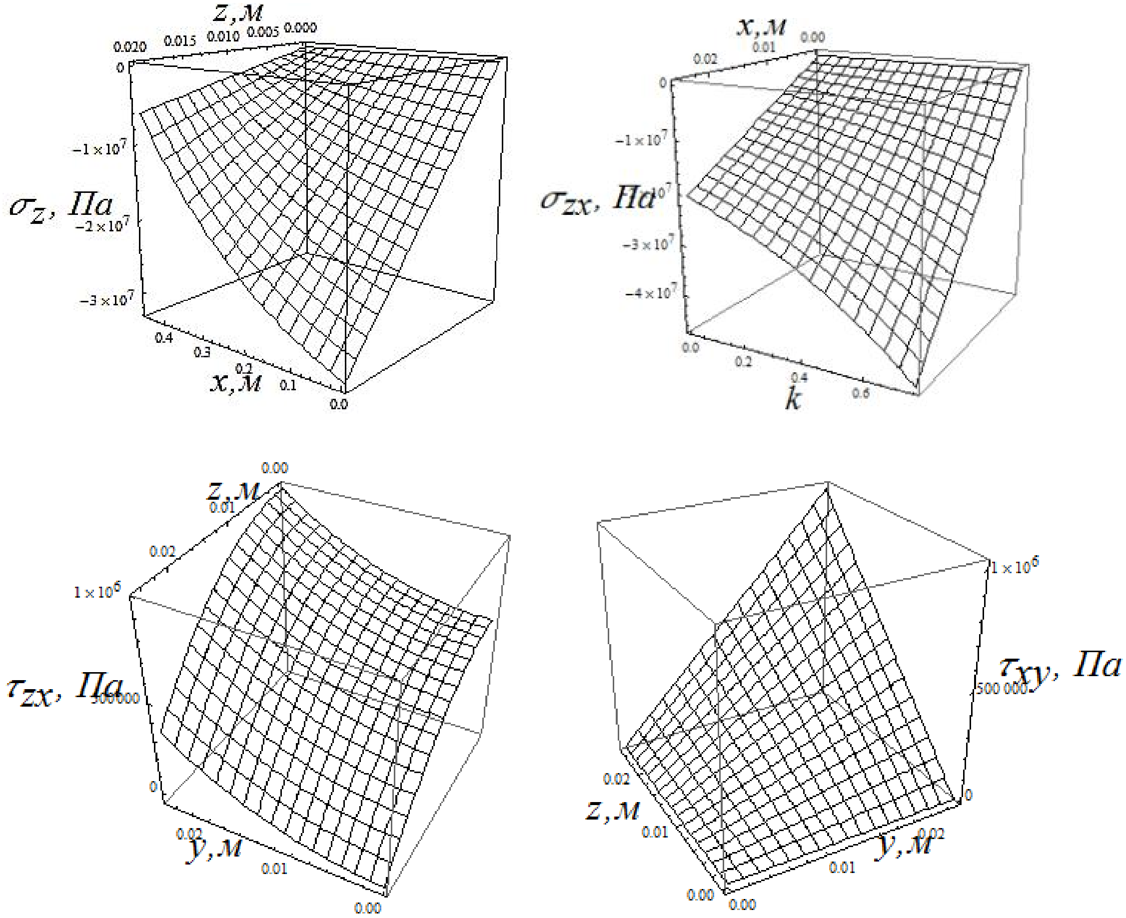


Рис. 2. Графіки залежностей (16) при змінному діаметрі прутка.

При відомих значеннях компонента напружень знайти переміщення не складає труднощів. Для знаходження переміщень можна використовувати геометричні рівняння Коші:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x};\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y};\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x};$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x};\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}. \qquad (17)$$

Для знаходження переміщень, в напрямку дії сили, тобто в напрямку осі OZ, можна використовувати п’яте рівняння із (17) у вигляді: $\dfrac{\partial w}{\partial x}=\gamma_{xz}-\dfrac{\partial u}{\partial z}$. Враховуючи те, що $u=\int\varepsilon_x dx=\varepsilon_x\, x+c$, де постійна інтегрування $c=0$, можна записати $\dfrac{\partial w}{\partial x}=\gamma_{xz}-\dfrac{\partial(\varepsilon_x\, x)}{\partial z}$.

Далі, скориставшись законом Гука, при відомих компонентах напружень: $\varepsilon_x=\dfrac{1}{E}\sigma_x;\gamma_{xy}=\dfrac{\tau_{xy}}{G};G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$, з урахуванням (16), шляхом інтегрування $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ по x, визначається функція переміщення:

$$w=\frac{h\,P\,x^2}{2E\,J}-\frac{P\,x^3}{3E\,J}+\frac{P\,x\left(-y^2\left(-2+\nu\right)+r^2\left(2+3\nu\right)-z^2\left(2+3\nu\right)\right)}{2G\,\pi\,r^4\left(1+\nu\right)}+C \quad (18)$$

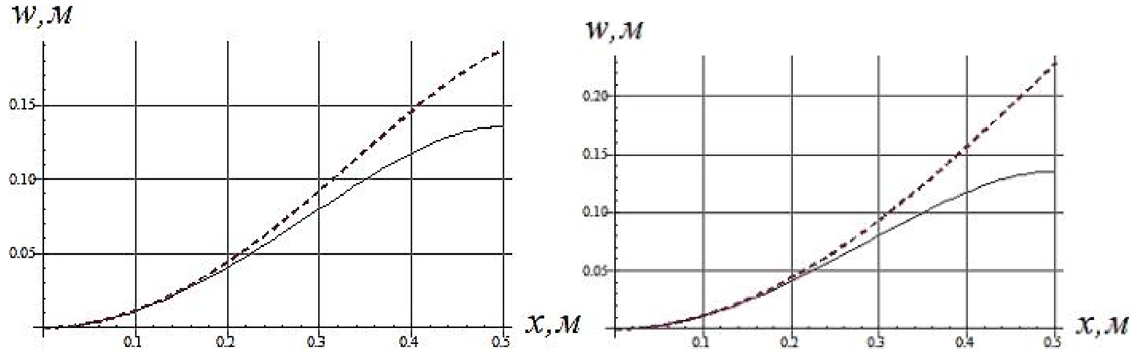
Вираз (18) записано для випадку, коли момент інерції перерізу стрижня J не залежить від координати x. Для випадку змінного діаметра стрижня, тобто при $J\to\dfrac{\pi r^4}{4}$, де $r=r_0\left(1-k\,x\right)$ (r_0 – половина діаметра прутка в початковому перерізі, тобто точці зароблення; k – коефіцієнт зміни перерізу прутка), вираз для переміщення прийме вигляд:

$$w=P\left(\frac{2E\left(2-6k\,x+6k^2\,x^2+h\left(k-3k^2x\right)\right)}{3E^2k^3\pi\,r_0^{\,4}\left(-1+k\,x\right)^3}+ +\frac{E\,k^2\left(y^2\left(-2+\nu\right)-3r_0^{\,2}\left(-1+k\,x\right)^2\left(2+3\nu\right)+z^2\left(2+3\nu\right)\right)}{3E^2k^3\pi\,r_0^{\,4}\left(-1+k\,x\right)^3}\right)+C \quad (19)$$

Постійні інтегрування в залежностях (18) і (19) визначаються з початкових умов, а саме: $w\big|_{x=0}=0$. У першому випадку постійного поперечного перерізу постійна інтегрування $C=0$ і вираз залишається незмінним (18).

У випадку, коли поперечний переріз змінний, постійна інтегрування $C\neq 0$ і вираз (19) набуває кінцевого вигляду (рис. 3):

$$\begin{aligned} w=&\frac{1}{3E\,\pi\,r_0^{\,4}(-1+k\,x)^3}P\times\\ &\times x(-6(y-z)(y+z)+2x(2x+(-3+k\,x)(h+k(-y^2+z^2)))+ \quad (20)\\ &+(3+k\,x(-3+k\,x))(y^2+3z^2)\nu-3r_0^{\,2}(-1+k\,x)^2(2+3\nu)) \end{aligned}$$



а б

Рис. 3. Переміщення точки прутка

а: суцільна лінія – змінний діаметр прутка, пунктирна – постійний діаметр, б: суцільна лінія – залежність (20), пунктирна – по залежності прийнятій в опорі матеріалів

Висновки. Отримана залежність (20) дозволяє визначити силу, яку необхідно прикласти для отримання певного прогину або напруженого стану в перетинах прутка змінного перерізу з певними пружними постійними.

Отримані залежності для компонентів напружень і переміщень прутка круглого перетину змінної жорсткості мають суттєві відмінності від результатів, які можуть бути отримані методами опору матеріалів та методами великих прогинів тонких прутків. При цьому жоден з перерахованих методів не дає можливості визначити розподіл напружень довільному перерізі прутка.

Отримані рішення можуть бути використані при вирішенні завдань пов'язаних з експлуатацією, що полягає в проектуванні робочих органів сільськогосподарських, лісогосподарських та інших машин.

Література

1. *Писаренко Г. С.* Сопротивление материалов / *Г. С.Писаренко*. - Киев: Вища школа, 1973. – 672 с.
2. *Попов Е. П.* Теория и расчет упругих стержней / *Е. П. Попов*. - М.: Наука, 1986. – 296 с.
3. *Самуль В. И.* Основы теории упругости и пластичности / *В. И. Самуль*. - М.: Вища школа, 1982. — 264 с.
4. *Лурье А. И.* Теория упругости / *А. И.Лурье*. - М.: Наука, 1970. — 940 с.

ПРО ИЗГИБ ЖЕСТКО ЗАДЕЛАННОГО ПРУТКА

В. П. Ковбаса, В. А. Гридякин, Л. Н. Матюшенко

Аннотация **– изложены результаты исследований определение линии прогиба прутка и распределения напряжений в произвольном сечении прутка. В результате было определено силу, которую необходимо приложить для получения определенного прогиба или напряженного состояния в сечениях прутка переменного сечения с определенными упругими постоянными. Полученные результаты могут быть использованы при решении задач связанных с эксплуатацией, а в особенности проектирования рабочих органов сельскохозяйственных, лесохозяйственных и других машин.**

ABOUT THE BENDING OF THE STEM RIGIDLY CLAMPED

V. Kovbasa, V. Grydiakin, L. Matyushenko

Summary

This paper presents the results of definition of line deflection rod and stress distribution in an arbitrary section rod. As result power that must be applied to obtain a certain state of stress or deflection in sections of variable cross-section rod with certain elastic constant swere defined. The received results can be used in case of the solution of tasks connected to maintenance, and in particular design of working organs of agricultural, silvicultural and other machines.