



УДК 631.17.002.5

## ДО ВИЗНАЧЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ЗВ'ЯЗКІВ, КУТІВ І ШВИДКОСТЕЙ КОЛІС ТРАКТОРА КЛАСИЧНОЇ КОМПОНОВКИ ПРИ ПОВОРОТІ

Антощенко Р.В., к.т.н.,

Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. П.Василенка

Тел./факс (066) 605-95-47, e-mail: roman.tiaxntusg@gmail.com

**Анотація** – у роботі одержані рівняння кінематичних зв'язків, кути і швидкості коліс трактора класичної компоновки при повороті.

**Ключові слова** – математична, динамічна модель, трактор, кінематичні зв'язки.

*Постановка проблеми.* Розв'язок задач визначення параметрів роботи машинно-тракторного агрегату в значній мірі пов'язаний з побудовою математичної моделі динаміки. Сільськогосподарські машинно-тракторні агрегати, до складу яких входять пружні елементи, відносять до класу неголономних нелінійних механічних систем.

*Аналіз останніх досліджень.* Для дослідження динаміки машинно-тракторних агрегатів використовують рівняння Лагранжу II-го роду [1-3]. У приведених роботах машинно-тракторний агрегат розглядають як голономну динамічну систему. Існують дослідження, в яких трактор, у складі машинно-тракторного агрегату, представлений як двоколісна модель [4]. Таке спрощення недопустиме для сільськогосподарських агрегатів з несиметричним агрегуванням машин. Для дослідження лісгосподарського колісного трейлера обґрунтовано математичну модель з використанням рівнянь Лагранжу, з урахуванням неголономних зв'язків [5].

У наведених вище роботах мають місце спрощення, які потребують поглиблених досліджень динаміки багатоелементних машинно-тракторних агрегатів. Окремі елементи агрегату повинні мати динамічні математичні моделі незв'язані з моделями інших елементів, між якими існують лише кінематичні та силові зв'язки.

*Формулювання цілей статті.* Метою роботи є визначення кінематичних зв'язків, кутів і швидкостей коліс трактора класичної ком-

поновки при повороті, що дозволяють досліджувати динаміку трактора як окремо, так і в складі машинно-тракторного агрегату.

*Основна частина.* Розглянемо динамічну модель колісного трактора класичної компоновки з передніми керованими колесами (на прикладі трактора ХТЗ-16131) (рис. 1).

На рис. 1 використано наступні позначення:  $X, Y, Z$  – Декартові координати центру мас трактора в абсолютній системі координат;  $\alpha, \beta, \gamma$  – кути Крилова (відповідно «крен», «тангаж» та «рискання»), що задають орієнтацію трактора в абсолютній системі координат;  $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{21}, \omega_{22}$  – кути повороту коліс (відповідно переднього лівого, переднього правого, заднього лівого, заднього правого) навколо своїх осей при коченні;  $\psi_{11}$  – кут повороту площини переднього лівого колеса навколо перпендикулярній рамі осі (задається постійним значенням або функцією часу, чи визначається з умов керування – маневрування, об'їзду перешкоди і т.д., тому не включається до узагальнених координат);  $\psi_{12}$  – кут повороту площини переднього правого колеса навколо перпендикулярній рамі осі;  $r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}$  – радіуси відповідних коліс;  $l$  – база трактора;  $l_1, l_2$  – відстань від центра мас трактора до вісі передніх та задніх коліс відповідно;  $b_1, b_2$  – колія передніх та задніх коліс;  $e_1$  – відстань між шкворнями передніх коліс.

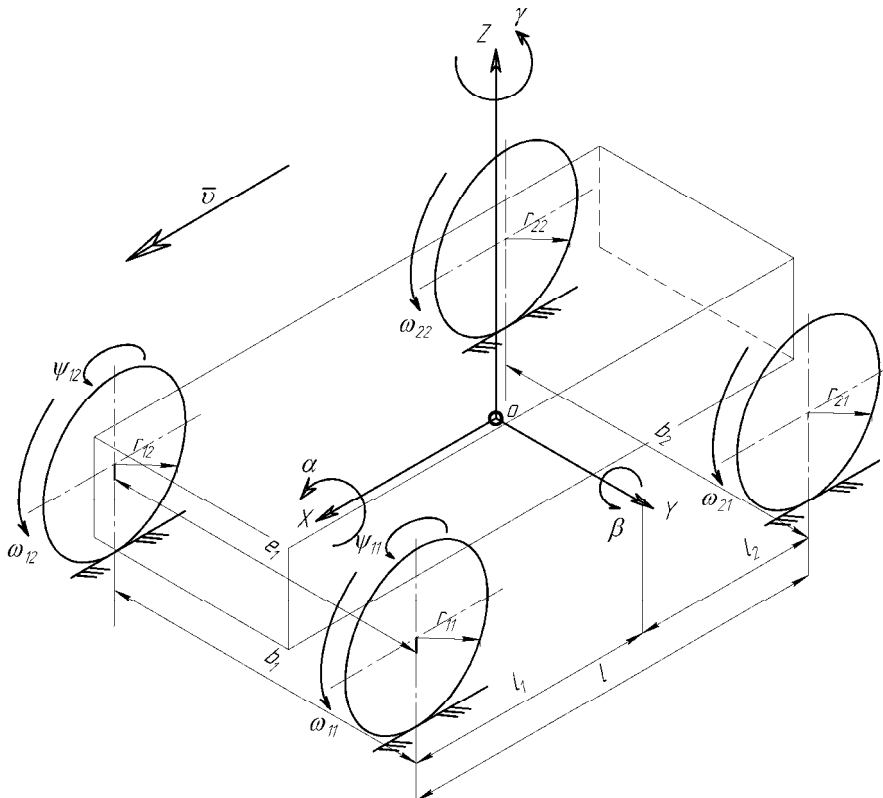


Рис. 1. Динамічна модель колісного трактора класичної компоновки.

Розрахункова схема повороту трактора наведена на рис. 2, де показано вид зверху на раму трактора з передніми керованими колесами. Позначимо точки торкання коліс із ґрунтом  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ , а центри коліс  $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ .

Горизонтальні складові швидкостей центрів коліс (точніше складові цих швидкостей у площині рами трактора), позначимо як  $\bar{v}_{C_{11}xy}, \bar{v}_{C_{12}xy}, \bar{v}_{C_{21}x}, \bar{v}_{C_{22}x}$ , а складову швидкості центру мас трактора позначимо  $\bar{v}_{Cxy}$ . Ці складові мають модулі, пропорційні відстаням центрів коліс до миттєвого центру швидкостей (МЦШ) – т.  $P$

$$\frac{v_{Cxy}}{PC} = \frac{v_{C_{11}xy}}{PC_{11}} = \frac{v_{C_{12}xy}}{PC_{12}} = \frac{v_{C_{21}x}}{PC_{21}} = \frac{v_{C_{22}x}}{PC_{22}}. \quad (1)$$

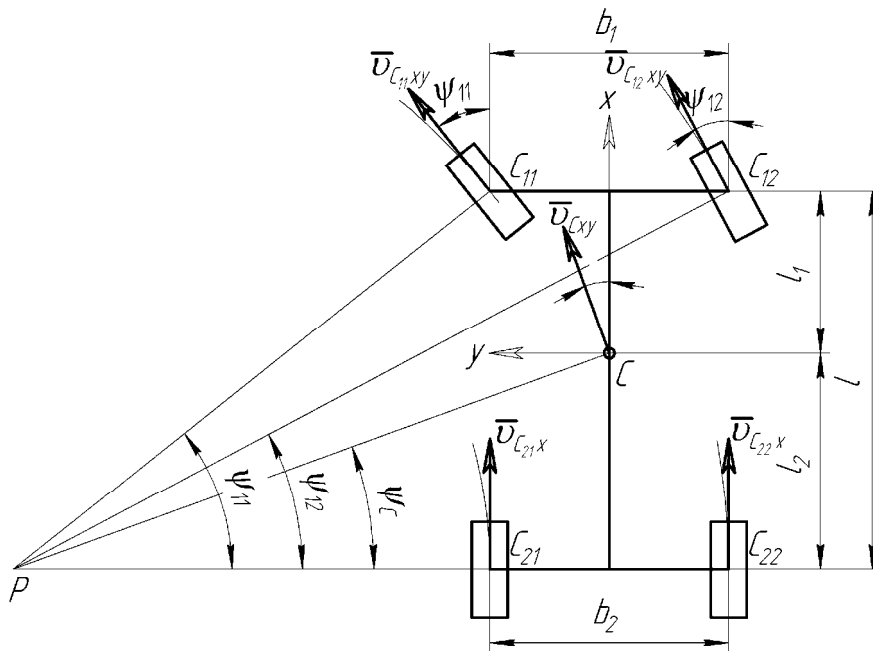


Рис. 2. Розрахункова схема повороту трактора класичної компоновки: т.  $P$  – центр повороту трактора;  $C$  – миттєвий центр швидкостей трактора;  $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$  – центри коліс трактора;  $\bar{v}_{C_{11}xy}, \bar{v}_{C_{12}xy}, \bar{v}_{C_{21}x}, \bar{v}_{C_{22}x}$  – горизонтальні складові швидкостей центрів коліс.

Знайдемо відстані, що входять до рівняння (1):

$$PC = \sqrt{\left(PC_{21} + \frac{b}{2}\right)^2 + l^2}; \quad PC_{11} = \sqrt{PC_{21}^2 + l^2};$$

$$PC_{12} = \sqrt{PC_{22}^2 + l^2}; \quad PC_{21} = \frac{l}{\operatorname{tg} \psi_{11}}; \quad PC_{22} = PC_{21} + b;$$



Таким чином, отримаємо

$$v_{C_{11}xy} = v_{C_{xy}} \frac{PC_{11}}{PC}.$$

Недоліком цієї формули є виродженість її при  $\psi_{11} = 0$ . Тому одержимо співвідношення між швидкостями центрів коліс, не використовуючи відстані до МЦШ. По теоремі Грасгофа («*проекції швидкостей точок твердого тіла на пряму, їхню з'єднуючу, однакові*») [6], одержимо:

$$v_{C_{11}xy} \sin \psi_{11} = v_{C_{12}xy} \sin \psi_{12}, \quad (2)$$

$$v_{C_{11}xy} \cos \psi_{11} = v_{C_{21}x}, \quad (3)$$

$$v_{C_{12}xy} \cos \psi_{12} = v_{C_{22}x}. \quad (4)$$

Підставимо (4) в (2), одержимо

$$v_{C_{22}x} = v_{C_{12}xy} \cos \psi_{12} = v_{C_{11}xy} \frac{\sin \psi_{11}}{\sin \psi_{12}} \cos \psi_{12} = v_{C_{11}xy} \sin \psi_{11} \operatorname{ctg} \psi_{12}. \quad (5)$$

З відповідних трикутників випливає

$$\operatorname{ctg} \psi_{12} = \frac{PC_{22}}{l} = \frac{PC_{21} + b}{l} = \operatorname{ctg} \psi_{11} + \frac{b}{l}, \quad (6)$$

або

$$\operatorname{tg} \psi_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg} \psi_{11}} + \frac{b}{l}} = \frac{\operatorname{tg} \psi_{11}}{1 + \frac{b}{l} \operatorname{tg} \psi_{11}} = \frac{\operatorname{tg} \psi_{11}}{1 + \beta \operatorname{tg} \psi_{11}},$$

де  $\beta = \frac{b}{l}$ .

Звідси

$$\psi_{12} = \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg} \psi_{11}}{1 + \beta \operatorname{tg} \psi_{11}} \right). \quad (7)$$

Цей вираз буде слушним і при повороті трактора вправо, на відміну від повороту вліво, показаного на рис. 2. У цьому випадку буде вважати кути  $\psi_{11}$  і  $\psi_{12}$  негативними, і знаменник буде менше одиниці, що призведе до збільшення модуля кута  $\psi_{12}$  щодо модуля кута  $\psi_{11}$ , що й дасть правильний результат. Таким чином, (7) дає можливість визначити кут повороту правого колеса по куту повороту лівого.

Підставимо (6) в (5), одержимо:



$$\begin{aligned}
v_{C_{22}x} &= v_{C_{11}xy} (\cos \psi_{11} + \beta \sin \psi_{11}), \\
v_{C_{12}xy} &= \frac{v_{C_{22}x}}{\cos \psi_{12}}, \\
v_{C_{21}x} &= v_{C_{11}xy} \cos \psi_{11}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Ці рівняння не інтегруються, тому, являють собою рівняння не-голономних зв'язків. При  $\psi_{11} = 0$  буде  $\psi_{12} = 0$  та  $v_{C_{12}xy} = v_{C_{21}x} = v_{C_{22}x} = v_{C_{11}xy}$ .

Точки взаємодії коліс із ґрунтом є миттєво нерухливими, тому:

$$\begin{aligned}
\omega_{11} = \dot{\phi}_{11} &= \frac{v_{C_{11}xy}}{z_{C_{11}}}, & \omega_{12} = \dot{\phi}_{12} &= \frac{v_{C_{12}xy}}{z_{C_{12}}}, \\
\omega_{21} = \dot{\phi}_{21} &= \frac{v_{C_{21}x}}{z_{C_{21}}}, & \omega_{22} = \dot{\phi}_{22} &= \frac{v_{C_{22}x}}{z_{C_{22}}}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Рівняння (9) являє собою 4 рівняння кінематичних неголономних зв'язків, тому що вони не можуть бути проінтегровані. Ці вирази вже вирішені щодо залежних узагальнених швидкостей  $\dot{\phi}_{11}, \dot{\phi}_{12}, \dot{\phi}_{21}, \dot{\phi}_{22}$  і неявно виражаються через узагальнені швидкості  $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ , тому що через них визначається складова швидкості центру мас  $\vec{v}_{Cxy}$ , а через неї інші швидкості, що входять у вираз (9).

Вектор  $\vec{v}_{Cxy}$  являє собою проекцію вектора швидкості центру мас трактора на площину його рами. Очевидно, його можна знайти через компоненти вектора абсолютної швидкості центру мас ( $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ ), скориставшись матрицею повороту  $S_{abc}^{cb}$  від абсолютної системи координат до пов'язаної з трактором головної центральної системи координат (позначеної на рис. 2  $S_{xyz}$ , названої далі, просто «зв'язана»), вираження для компонентів якої мають вигляд [7]

$$S_{abc}^{cb} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\beta}C_{\gamma} + S_{\alpha}S_{\beta}S_{\gamma} & C_{\alpha}S_{\gamma} & -S_{\beta}C_{\gamma} + S_{\alpha}C_{\beta}S_{\gamma} \\ S_{\alpha}S_{\beta}C_{\gamma} - C_{\beta}S_{\gamma} & C_{\alpha}C_{\gamma} & S_{\alpha}C_{\beta}C_{\gamma} + S_{\beta}S_{\gamma} \\ C_{\alpha}S_{\beta} & -S_{\alpha} & C_{\alpha}C_{\beta} \end{bmatrix},$$

де  $C_{\alpha} = \cos \alpha$ ,  $C_{\beta} = \cos \beta$ ,  $C_{\gamma} = \cos \gamma$ ,  $S_{\alpha} = \sin \alpha$ ,  $S_{\beta} = \sin \beta$ ,  $S_{\gamma} = \sin \gamma$ .

Швидкість центру мас трактора буде наступною

$$\vec{v}_{Cxy} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix}. \tag{10}$$



З іншого боку, модуль цієї складової швидкості можна знайти як швидкість точки тіла (рами), що обертається навколо т.  $P$  з кутовою швидкістю, що дорівнює складової абсолютної кутової швидкості  $\omega_z$  вздовж осі  $C_z$ , перпендикулярної площини рами. Ця кутова швидкість має у зв'язаній системі координат вигляд

$$\vec{\omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T = [\dot{\alpha}C_\gamma + \dot{\beta}C_\alpha S_\gamma \quad -\dot{\alpha}S_\gamma + \dot{\beta}C_\alpha C_\gamma \quad -\dot{\beta}S_\alpha + \dot{\gamma}]^T,$$

тому модуль складової швидкості центру мас одержить вираз

$$v_{Cxy} = \omega_z \cdot PC,$$

а відповідні компоненти по осях  $C_x$  і  $C_y$

$$\vec{v}_{Cxy} = (\dot{\gamma} - \dot{\beta} \sin \alpha) \cdot PC \begin{bmatrix} \cos \psi_C \\ \sin \psi_C \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Дорівнюємо праві частини виразів (10) і (11), одержимо

$$\begin{aligned} s_{11}\dot{X} + s_{12}\dot{Y} + s_{13}\dot{Z} &= (\dot{\gamma} - \dot{\beta} \sin \alpha) \cdot PC \cdot \cos \psi_C, \\ s_{21}\dot{X} + s_{22}\dot{Y} + s_{23}\dot{Z} &= (\dot{\gamma} - \dot{\beta} \sin \alpha) \cdot PC \cdot \sin \psi_C, \end{aligned} \quad (12)$$

(12) є рівнянням ще двох неголономних зв'язків.

Разом система «трактор на пружних колесах» представляється неголономною системою з 6-ю неголономними зв'язками, рівняння яких представляються виразами (9) і (12). При цьому (12) дозволяє виразити дві узагальнені швидкості через три інших, що сюди входять. Можливі три варіанти:

1. виразити  $\dot{X}, \dot{Y}$  через  $\dot{Z}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ ;
2. виразити  $\dot{X}, \dot{Z}$  через  $\dot{Y}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ ;
3. виразити  $\dot{Y}, \dot{Z}$  через  $\dot{X}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ .

У першому випадку визначник системи рівнянь буде наступний:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} = (C_\beta C_\gamma + S_\alpha S_\beta S_\gamma) C_\alpha C_\gamma - (S_\alpha S_\beta C_\gamma - C_\beta S_\gamma) C_\alpha S_\gamma = \\ &= C_\alpha C_\beta C_\gamma^2 + C_\alpha C_\beta S_\gamma^2 = C_\alpha C_\beta = \cos \alpha \cos \beta; \end{aligned}$$

у другому випадку

$$\Delta = S_\alpha = \sin \alpha;$$

у третьому

$$\Delta = C_\alpha S_\beta = \cos \alpha \sin \beta.$$



Звідси видно, що треба зупинитися на першому випадку, тому що при русі трактора визначник системи рівнянь не дорівнює нулю та близький до 1.

Одержимо для цього випадку допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} PC(\dot{\gamma} - \dot{\beta} \sin \alpha) \cos \psi_c - s_{13} \dot{Z} & s_{12} \\ PC(\dot{\gamma} - \dot{\beta} \sin \alpha) \sin \psi_c - s_{23} \dot{Z} & s_{22} \end{vmatrix} = \\ = [PC(\dot{\gamma} - \dot{\beta} \sin \alpha) \cos(\gamma + \psi_c) + \dot{Z} \sin \beta] \cos \alpha,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} s_{11} & PC(\dot{\gamma} - \dot{\beta} \sin \alpha) \cos \psi_c - s_{13} \dot{Z} \\ s_{21} & PC(\dot{\gamma} - \dot{\beta} \sin \alpha) \sin \psi_c - s_{23} \dot{Z} \end{vmatrix} = \\ = PC(\dot{\gamma} - \dot{\beta} \sin \alpha) [\cos \beta \sin(\gamma + \psi_c) - \sin \alpha \sin \beta \cos(\gamma + \psi_c)] - \dot{Z} \sin \alpha.$$

Тоді запишемо шукані розв'язки:

$$\dot{X} = \frac{[PC(\dot{\gamma} - \dot{\beta} \sin \alpha) \cos(\gamma + \psi_c) + \dot{Z} \sin \beta]}{\cos \beta}, \\ \dot{Y} = \frac{PC(\dot{\gamma} - \dot{\beta} \sin \alpha) [\cos \beta \sin(\gamma + \psi_c) - \sin \alpha \sin \beta \cos(\gamma + \psi_c)] - \dot{Z} \sin \alpha}{\cos \alpha \cos \beta}. \quad (13)$$

Таким чином, у трактора на пружних колесах 10 узагальнених координат. З урахуванням неголономних зв'язків, рівняння яких представлені формулами (9) і (13), у цієї системи 4 ступені свободи. Рівняння (9) і (13) дозволяють одержати рівняння *шести залежних* узагальнених швидкостей (залежних варіацій узагальнених координат) від *інших незалежних*.

#### Висновки.

1. У роботі одержані рівняння кінематичних зв'язків, залежності кутів і швидкостей коліс трактора класичної компоновки при повороті.

2. У чотирьохколісного трактора 10 узагальнених координат. З урахуванням неголономних зв'язків динамічна система має 4 ступені свободи.

3. Для трактора класичної компоновки одержані рівняння шести залежних узагальнених швидкостей (залежних варіацій узагальнених координат) від інших незалежних.

#### Література

1. Ярошенко П.М. Математична модель комбінованого посівного агрегату [Текст] / П. М. Ярошенко // Вісник Сумського національного аграрного університету. Суми, 2008. – Вип. 3 (19). – С. 62 – 66.
2. Артёмов Н.П. Повышение устойчивости движения пахотного аг-



- регата при изменении технических параметров системы управления: дисс. кандидата техн. наук: 05.05.11 «Машины и средства механизации с.-х. производства» [Текст] / *Артёмов Николай Прокофьевич.* – Харьков, 2006. – 179 с.
3. *Ямков О.В.* Обґрунтування раціональної схеми компоновки і колії трактора бурякозбирального агрегата [Текст] / *О.В. Ямков* // Зб. наук. пр. Національний університет біоресурсів і природокористування України. – К.: НУБіП України. – Вип.144, ч.3. – 2010. – С. 399 – 409.
  4. *Manoj K.* Modeling, identification and analysis of tractor and single axle towed implement system [Text] / *K. Manoj* // Iowa State University, 2009. – 246 p.
  5. *Кочнев А.М.* Математическая модель взаимодействия колесной трелевочной системы с волоком с учетом неголономных связей [Текст] / *А.М. Кочнев* // Тракторы и сельскохозяйственные машины, 2009. – №12. – С. 14 – 19.
  6. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов [Текст] / *С.М. Тарг* – М.: Высш. шк., 1986. – 416 с.
  7. *Синяков И.М.* Системы управления упругими подвижными объектами [Текст] / *И.М. Синяков* – Л.: ЛГУ, 1981. – 200 с.

## **К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КИНЕМАТИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ, УГЛОВ И СКОРОСТЕЙ КОЛЕС ТРАКТОРА КЛАССИЧЕСКОЙ КОМПОНОВКИ ПРИ ПОВОРОТЕ**

Р.В. Антощенко

**Аннотация** - в работе определены кинематические связи, углы и скорости колес трактора классической компоновки при повороте.

## **TO DETERMINE KINEMATIC CONSTRAINTS ANGULAR AND SPEED OF THE TRACTOR WHEELS THE CLASSIC LAYOUT WHEN TURNING**

R. Antoshchenkov

### **Summary**

**In this paper we define kinematic constraints, angles and speed of the tractor wheels classic layout when turning.**