



УДК 621.888.6: 624.012: 539.32.001.6

## **АНАЛІЗ ВІБРАЦІЙНО-ХВИЛЬОВИХ РЕЗОНАНСІВ ТА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНОГО МОДУЛЯ ПРУЖНОСТІ ҐРУНТІВ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО ПРИЗНАЧЕННЯ**

Ловейкін В.С., д. т. н.,

Човнюк Ю.В., к. т. н.,

Дяченко Л.А., здобувач

*Національний університет біоресурсів і природокористування  
України*

Тел.: (044) 527-87-34

**Анотація** - проведений аналіз вібраційно-хвильових резонансів та експериментальне визначення резонансних частот та динамічного модуля пружності ґрунтів сільськогосподарського призначення.

**Ключові слова** – резонансна частота, ґрунт, система з розподіленими параметрами, методи математичної фізики.

*Постановка проблеми.* За своїми властивостями малозв'язні ґрунти сільськогосподарського призначення відносяться до пружно- й в'язкопластичних середовищ котрі характеризуються цілою низкою реологічних характеристик, які у процесі їх вібраційної обробки (зокрема ущільнення) безперервно змінюються. Зокрема, при ущільненні ґрунтів у вібраційних полях має місце зростаючий вплив сил пружного опору над непружним (дисипативним) внаслідок чого у основній фазі свого ущільнення ґрунт набуває помітних пружних властивостей і його можна вважати гомогенним пружним середовищем.

Виходячи з викладеного вище, у ґрунтах сільськогосподарського призначення, котрі перебувають під впливом вібраційних полів, обов'язково повинно мати місце фізико-механічне явище – резонансний стан, що характеризується виникненням в ущільненому об'ємі ґрунту зон з різним рівнем інтенсивності вібрації по висоті прошарку ґрунту. Поки у системі будуть спостерігатись переважаючі впливи дисипативних сил, їх рух носить не коливний характер, а аперіодичний. Пояснення описаних явищ впливає із законів механіки хвильових процесів [1].

Проведення експериментальних досліджень, які б підтверджували правомірність зроблених вище припущень, примушує дослідників динамічних, реологічних властивостей ґрунтів сільськогосподарського призначення вивчати характер зміни їх динамічного модуля пружності, резонансних частот коливань за наявності впливу вібраційних полів в умовах ущільнення у резонансному режимі з пришвидшеннями від 1,0 до 5,0  $g$  ( $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ). Знання його (динамічного модуля) величини для кожного складу ґрунту із заданими консистенцією та іншими реологічними характеристиками багато у чому буде сприяти правильному вибору динамічних параметрів вібраційного поля, а також режимів роботи вібропługів.

Величину динамічного модуля пружності  $E_v$  ґрунту можна при певних припущеннях встановлювати, користуючись аналітичним описом умов, які дійсні при наявності у ґрунті вібрацій. При цьому слід виходити з апроксимації ґрунту системою з розподіленими параметрами.

Слід зазначити, що вибір моделі пружних елементів систем з розподіленими параметрами визначається спектром частот вібраційного впливу (на оброблюваний ґрунт). Чим вони вище, тим більш складною виявляється модель пружних елементів (ПЕ). Якщо частоти збудження більше власних частот ПЕ, їх необхідно розглядати у виді систем з розподіленими параметрами. У цьому випадку поздовжні пружні коливання у ПЕ (ґрунт) описуються хвильовим рівнянням відносно переміщення  $u(x, t)$  площини його поперечного перерізу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \cdot \delta \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

де  $\delta$  – коефіцієнт розподілених втрат,  
 $c$  – швидкість розповсюдження переміщення вздовж ПЕ,  
 $(x, t)$  – просторова (у поздовжньому напрямку) і часова координати,

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

$E$  – модуль пружності,

$\rho$  – щільність матеріалу ПЕ (ґрунту).

Подальший метод розв'язку рівняння (1) вимагає наявності початкових та граничних умов. При цьому, використання методу розділення змінних вимагає специфічного виду вказаних умов.

Вибір розрахункової системи з розподіленими параметрами у даному випадку обумовлений тим, що розміри найбільших у диспергованих елементів ґрунту менше, ніж величини його елементарних об'ємів, у котрих є анізотропні дисперговані елементи різноманітних орієнтацій. Це дозволяє застосувати при вивченні динамічних власти-

востей віброваних ґрунтів сільськогосподарського призначення (ГСП) методи феноменологічної макрореології, розроблені для квазіоднорідного та квазіізотропного суцільних середовищ [3]. У розглядуваному прикладі методикою експериментальних досліджень передбачено використання часточок ґрунту з максимальною крупністю  $16 \cdot 10^{-3}$  м при розмірах зразка ґрунту, що знаходиться під впливом вібраційного поля, у 0,1 м.

*Аналіз публікацій по темі дослідження.* Слід зазначити, що основні методи феноменологічної макрореології, які можна використати для визначення динамічного модуля пружності та резонансних частот віброваних ґрунтів сільськогосподарського призначення, розроблені у [1, 3] для квазіоднорідного та квазіізотропного суцільних середовищ, а методологія експериментального їх визначення, зокрема, для бетонних сумішей, що за своїми властивостями подібні до малозв'язних ґрунтів, викладена у [2]. Проте автори останнього цитованого дослідження некоректно використовують метод Фур'є для визначення амплітудно-частотних характеристик та фізико-механічних параметрів зразків, які знаходяться під впливом вібраційного поля.

*Мета даної роботи* полягає у встановленні основних фізико-механічних параметрів та резонансних частот зразків ґрунтів сільськогосподарського призначення, які знаходяться під впливом вібраційного поля певної частоти, на основі коректних моделей середовища, як системи з розподіленими параметрами, та методів математичної фізики.

*Виклад основного змісту дослідження.* У якості основних припущень, які застосовуються при аналітичному описі процесу вимушених коливань стовпа ґрунту висотою  $l$ , й площею поперечного перерізу  $S$  та загальною масою  $m$  як системи з розподіленими параметрами, запропоновані наступні: центри ваги поперечного перерізу стовпа ґрунту розміщені на одній вертикалі, котра є також віссю симетрії всієї системи, вплив бічних стінок форми на коливання основної маси ґрунту не враховується; перерізи стовпа ґрунту при всіх розглядуваних у процесі вібрування деформаціях залишаються плоскими, часточки ґрунту не здійснюють поперечних рухів і переміщаються виключно у вертикальному напрямку; вага прошарків, розміщених, вище даного, при умові довільно обраного поперечного перерізу стовпа ґрунту не враховується, оскільки вона врівноважується статичною пружною силою; для кожного даного моменту часу приймаємо щільність, модуль пружності й коефіцієнт внутрішнього тертя ґрунту не залежними від часу; перехідна фаза ущільнення ґрунту між початком й закінченням процесу вібрування не враховується, що дозволяє вважати приведені коефіцієнти не залежними від відстані до центру тяжіння обраного поперечного перерізу ґрунту.

Із врахуванням зроблених припущень загальне рівняння поздовжніх коливань неоднорідного стрижня з лінійним опором [1, 3] узагальнюється у частинний вид рівняння коливань однорідного стрижня (тип (1)).

З даних роботи [3] випливає, що при оцінці характеру коливань ґрунту на вібростолі з відомим наближенням внутрішній опір можна не враховувати ( $\delta \rightarrow 0$ ), оскільки форми власних коливань не залежать від в'язких властивостей стрижня, що у результаті дозволяє отримати відоме хвильове рівняння

$$c^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (2)$$

- де  $y$  – переміщення довільного перерізу стовпа ґрунту при коливаннях у напрямку вібрації;  
 $x$  – відстань від поверхні стола, який коливається, до центру тяжіння обраного перерізу;  
 $t$  – тривалість вібраційного впливу;  
 $c = \sqrt{E_v/\rho}$  – швидкість розповсюдження хвиль напружень у ґрунті при вібраціях.

При впливі на систему коливань синусоїдальної форми з амплітудою  $A$  й круговою частотою  $\omega$  із врахуванням встановлених граничних умов: при  $x=0$   $y(0)=A \cdot \sin \omega \cdot t$ ; при

$$x=l \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3)$$

(вільна поверхня, без навантажень) вихідне рівняння (2) має розв'язок:

$$y(x,t) = A \cdot \left\{ \cos \left[ \frac{\omega \cdot x}{c} \right] + \operatorname{tg} \left[ \frac{\omega \cdot l}{c} \right] \cdot \sin \left[ \frac{\omega \cdot x}{c} \right] \right\} \cdot \sin \omega t + \frac{2A \cdot \omega \cdot c}{l} \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[ (-1)^{k-1} - 1 + (-1)^k \cdot \cos \left( \frac{\omega \cdot l}{c} \right) \right]}{\left[ \omega^2 - \left( \frac{k \cdot \pi \cdot c}{l} \right)^2 \right]} \cdot \sin \left[ \frac{k \cdot \pi \cdot c \cdot t}{l} \right] \cdot \sin \left[ \frac{k \cdot \pi \cdot x}{l} \right]. \quad (4)$$

За граничних умов (т. з. поверхневого віброущільнення ГСП): при  $x=0$   $y(0)=0$ ; при  $x=l$   $y(l)=A \cdot \sin \omega t$  (5)  
 рівняння (2) має такий розв'язок

$$y(x,t) = A \cdot \left[ \frac{\sin \left( \frac{\omega \cdot x}{c} \right)}{\sin \left( \frac{\omega \cdot l}{c} \right)} \right] \cdot \sin \omega t + \frac{2A \cdot \omega \cdot c}{l} \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\left[ \omega^2 - \left( \frac{k \cdot \pi \cdot c}{l} \right)^2 \right]} \cdot \sin \left[ \frac{k \cdot \pi \cdot c \cdot t}{l} \right] \cdot \sin \left[ \frac{k \cdot \pi \cdot x}{l} \right]. \quad (6)$$

Прискорення вібрації представляє собою другу похідну переміщення  $y(x, t)$  даного рівнянням (4) або (6), по часу  $t$ :

$$a) a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = A \cdot \left\{ \cos \left[ \frac{\omega \cdot x}{c} \right] + \operatorname{tg} \left[ \frac{\omega \cdot l}{c} \right] \cdot \sin \left[ \frac{\omega \cdot x}{c} \right] \right\} \cdot (-\omega^2) \cdot \sin \omega t + \frac{2A \cdot \omega \cdot c}{l} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[ (-1)^{k-1} - 1 + (-1)^k \cdot \cos \left( \frac{\omega \cdot l}{c} \right) \right]}{\left[ \omega^2 - \left( \frac{k \cdot \pi \cdot c}{l} \right)^2 \right]} \cdot (-1) \cdot \left( \frac{k \cdot \pi \cdot c}{l} \right)^2 \cdot \sin \left[ \frac{k \cdot \pi \cdot c \cdot t}{l} \right] \cdot \sin \left[ \frac{k \cdot \pi \cdot x}{l} \right] \quad (7)$$

$$б) a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = A \cdot \left[ \frac{\sin \left( \frac{\omega \cdot x}{c} \right)}{\sin \left( \frac{\omega \cdot l}{c} \right)} \right] \cdot (-\omega^2) \sin \omega t + \frac{2A \cdot \omega \cdot c}{l} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\left[ \omega^2 - \left( \frac{k \cdot \pi \cdot c}{l} \right)^2 \right]} \cdot (-1) \cdot \left( \frac{k \cdot \pi \cdot c}{l} \right)^2 \cdot \sin \left[ \frac{k \cdot \pi \cdot c \cdot t}{l} \right] \cdot \sin \left[ \frac{k \cdot \pi \cdot x}{l} \right]. \quad (8)$$

(Випадок *a*) відповідає розв'язку (4), а випадок *б*) – розв'язку (6). Величина максимального прискорення коливань при  $\sin \omega \cdot t = 1$  у ґрунті дорівнює:

$$a) a_{\max} = a_v \cdot \left\{ \cos \left[ \frac{\omega \cdot x}{c} \right] + \operatorname{tg} \left[ \frac{\omega \cdot l}{c} \right] \cdot \sin \left[ \frac{\omega \cdot x}{c} \right] \right\}; \quad (9)$$

$$б) a_{\max} = a_v \cdot \left\{ \frac{\sin \left( \frac{\omega \cdot x}{c} \right)}{\sin \left( \frac{\omega \cdot l}{c} \right)} \right\}, \quad (10)$$

де  $a_v = A \cdot \omega^2$  – максимальне значення прискорення коливань вібростолу (знак у (7) й (8) не враховується).

Слід зазначити, що другий член (сума) у (7) та (8) змінюється у часі доволі швидко з різними частотами  $\Omega_k = k \cdot \pi \cdot c / l$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , а тому вклад від цього доданку малий у  $a_{\max}$  й першому наближенні (якщо  $\omega \neq \Omega_k$ ) ним можна знехтувати.

Використовуючи рівняння (9), обчислимо величину прискорення на поверхні стовпа ґрунту при  $x = l$

$$a_{\max} = \frac{a_v}{\cos \left( \frac{\omega_n \cdot l}{c} \right)} = \frac{a_v}{\cos \left\{ \omega_n \cdot l \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E_v}} \right\}}. \quad (11)$$

З рівняння (11) випливає, що при

$$\omega_n \cdot l \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E_v}} = \frac{\pi}{2} \cdot (2n - 1), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

$a_{\max} \rightarrow \infty$ . Однак завдяки наявності у ГСП внутрішнього тертя його (прискорення) величина буде обмежена деякими межами.

Приймаючи в умові (12)  $\omega_n \cdot l \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E_v}} = \frac{\pi}{2}$ , визначимо вираз для  $\omega_n$

$$\omega_n = \frac{\pi}{2l} \cdot \sqrt{\frac{E_v}{\rho}}, \quad (13)$$

де  $\omega_n = 2 \cdot \pi \cdot f_r$ ;

$f_r$  – вибіркова (резонансна) лінійна частота коливань ґрунту, Гц.

Шукана величина динамічного модуля пружності визначиться зі співвідношення (13)

$$E_v = 16 \cdot f_r^2 \cdot l^2 \cdot \rho \quad (14)$$

Слід зазначити, що вирази (13) та (14) отримані за припущення виключно поздовжньої деформації зразка ГСП і тому задовольняють умовам, за яких висота стовпа ГСП у багато разів перевищує його площу поперечного перерізу  $S$ , тобто  $l \gg \sqrt{S}$ . Для зразків ГСП кубоподібної форми, де  $l \approx \sqrt{S}$ , де необхідно враховувати також й поперечну деформацію.

Із врахуванням останнього зауваження вираз (13) прийме вигляд

$$\omega_n = \frac{\pi}{2l} \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho} \cdot 3 \cdot \frac{(\tilde{m}-1)}{(\tilde{m}+1)} \cdot c'_y}, \quad (15)$$

де  $\tilde{m}$  – постійна Пуассона ( $\tilde{m} = 3,3$ );

$c'_y = \frac{\tilde{m} \cdot E_v}{3 \cdot (\tilde{m} - 2)}$  – модуль об'ємної деформації ГСП.

Після відповідних перетворень отримаємо кінцевий вид формули для визначення динамічного модуля пружності

$$E_v = 11,89 \cdot f_r^2 \cdot l^2 \cdot \rho. \quad (16)$$

За наявності граничних умов, які призводять до  $a_{max}$  (10) вираз для  $\omega_n$  змінюється

$$\omega_n \cdot l \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E_v}} = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

При  $n=1$   $\omega_n$  (17) дорівнює

$$\omega_n = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{E_v}{\rho}}, \quad (18)$$

Тобто у 2 рази більше, ніж  $\omega_n$  з (13). Тому перетворення щодо визначення  $f_r$  й  $E_v$  (14) – (16) зрозумілим чином замінюються ( $E_v$  зростає у (14) у 4 рази,  $\omega_n$  зростає у (15) у 2 рази,  $E_v$  зростає у (16) у 4 рази).

Експериментальне визначення динамічного модуля пружності ГСП, його резонансних частот  $\omega_n, f_r$  здійснювалось із врахуванням методики, запропонованої у [2], заснованої на використанні резонансно-

го стану віброущільнюваного зразка ґрунту й виконувалось наступним чином.

На робочому столі вібраційного стенду PVE-LING розміщувався зразок ГСП висотою  $l$  (рис.1), на верхній площині котрого був закріплений п'єзоелектричний акселерометр фірми "Briel and Kjaer". При відповідній (резонансній) частоті коливань джерела вібрації  $f_r$ , яка змінювалась за допомогою звукового генератора, на поверхні зразка ГСП фіксувалось деяке максимальне значення прискорення (11)  $a_{max}$  (прискорення коливань вібростенду  $a_v$  у процесі експерименту підтримувалось на постійному рівні).

Подальше обчислення  $\omega_n$  та  $E_v$  (модуля пружності ГСП) здійснювалось за формулами (13) та (15) й (16).

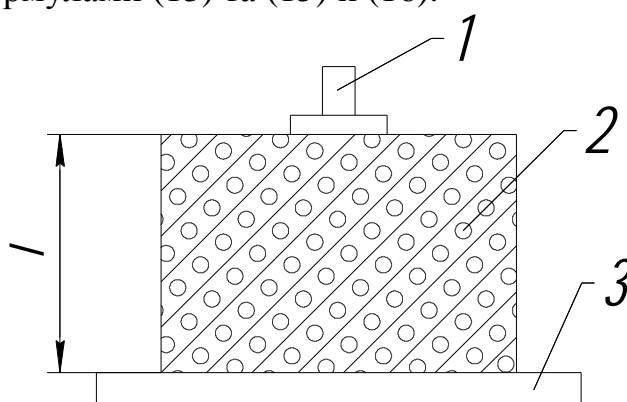


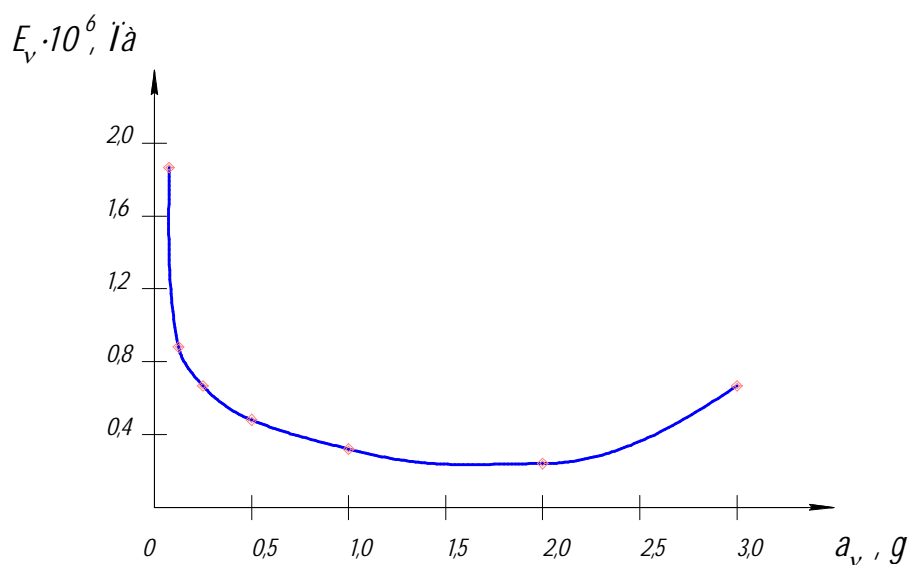
Рис. 1. Схема вимірювання динамічного модуля пружності ГСП: 1 – датчик прискорення (тип – 4332); 2 – зразок ГСП; 3 – вібростенд.

У дослідях використовувались зразки ГСП при  $D_{max}=16 \cdot 10^{-3}$  м, які мали розміри  $0,1 \times 0,1 \times 0,1$  м.

Експериментально встановленому значенню резонансної частоти  $f_r = 50 \dots 70$  Гц (за заданого прискорення джерела вібрації  $1,0 \cdot g$ ) відповідає обчислена величина динамічного модуля пружності ГСП  $E_v = (8 \cdot 10^5 \dots 1,8 \cdot 10^6)$  Па, та  $c = (20 \dots 28)$  м/с.

Якщо величину  $E_v$  ГСП, отриману у експерименті, порівняти зі значеннями тієї ж величини, яка встановлюється ультразвуковим методом, то значення будуть відрізнятися у десятки разів  $E_v = (320 \cdot 10^5 \dots 80 \cdot 10^6)$  Па [2].

Подібні відмінності можна пояснити пластичними деформаціями ГСП при використанні більш високих прискорень вібрації у відповідності з резонансною методикою досліджень, що підтверджується подальшими дослідженнями залежності  $E_v$  ГСП від різних величин прискорень коливань (рис. 2).

Рис. 2. Залежність  $E_v$  ГСП від  $a_v$ .*Висновки:*

1. У роботі обґрунтовані залежності для визначення  $E_v$  та  $f_r$  ГСП, які дозволяють вимірювати ці величини для зразків ґрунту скінченної висоти як систем з розподіленими параметрами за різних граничних умов.

2. При використанні величини динамічного модуля пружності у вібраційних процесах у ГСП його значення, отримане ультразвуковим методом, буде суттєво відрізнятися від значення, знайденого за резонансною методикою.

3. У області вібраційного формування (впливу на ГСП) виходячи з викладеного вище, пропонується у подальшому використовувати “вібраційний” модуль пружності  $E_v$ , який визначається у процесі резонансного ущільнення ГСП з прискоренням (1...5)g, а також формули для коректного визначення власних резонансних частот ґрунту ( $f_r$ ), як системи з розподіленими параметрами.

*Література.*

1. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. / С. П. Тимошенко. – М.: Наука, 1967. – 340с.
2. Крейчи И. Экспериментальное определение динамического модуля упругости вибрируемых бетонных смесей. / И. Крейчи, В. Т. Кравчук // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1982. – №12. – с.16-20
3. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1967. – 320с.



**АНАЛИЗ ВИБРАЦИОННО-ВОЛНОВЫХ РЕЗОНАНСОВ И  
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ  
ДИНАМИЧЕСКОГО МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ГРУНТОВ  
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО НАЗНАЧЕНИЯ**

*Ловейкин В.С., Човнюк Ю.В., Дяченко Л.А.*

**Аннотация** - проведен анализ вибрационно-волновых резонансов и экспериментальное определения резонансных частот и динамического модуля упругости грунтов сельскохозяйственного предназначения.

**ANALYSIS OF VIBRATION-WAVE RESONANCES  
AND EXPERIMENTAL DETERMINATION OF DYNAMIC  
MODULUS OF ELASTICITY OF GROUND  
FOR AGRICULTURAL DESTINATION**

*V. Loveykin, Ju. Chovnyuk, L. Dyachenko*

**Summary**

The analysis of vibratory-wave resonances and experimental definitions of resonant frequencies and a dynamic elastic modulus of agricultural soils is realized.