



УДК 514.18:631.3

УТОЧНЕНА ТЕОРІЯ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ПО ГРАВІТАЦІЙНИМ ПОВЕРХНЯМ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ МАШИН

Булгаков В.М., д.т.н.,

Національна академія аграрних наук України

Калетнік Г.М., д.е.н.,

Кравченко І.Є., к.т.н.,

Вінницький національний аграрний університет

Пилипака С.Ф., д.т.н.

*Національний університет біоресурсів і природокористування
України*

Тел.: (044) 527-82-26

Анотація – виведені диференціальні рівняння руху матеріальної точки по розгортному гелікоїду під дією сили власної ваги. За результатами розв’язку рівнянь побудовані траєкторії на поверхні гелікоїда для різних початкових умов. Знайдено траєкторії для постійної швидкості руху матеріальної точки.

Ключові слова – сепаратор, нормальна площина, розгортний гелікоїд, матеріальна точка.

Постановка проблеми. Фундаментальні дослідження руху матеріальної частинки по фрикційним поверхням сільськогосподарських машин опубліковані у працях академіка Василенко П.М., причому в більшості випадків це здійснюється по кривим або поверхням, які носять назву гравітаційних [1]. Задача по теорії руху частинки по гвинтовій поверхні на даний час розв’язана в достатньо повному і узагальненому вигляді [1].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Елементарний розв’язок даної задачі в застосуванні до проектування спіральних сепараторів розробив проф. Л.Б. Левенсон [1]. Рух матеріальної частинки по косою (нерозгортному) гелікоїду досить ґрунтовно розглянуто в працях проф. М.І. Акімова [1] і проф. П.М. Заїки [2]. М.І.Сисоев дав узагальнене розв’язання задачі руху частинки по гравітаційній гвинтовій поверхні сталого кроку, осьовим перерізом якої є довільна крива [3]. Як окремий випадок він розглянув розгортний гелікоїд, а також косий гелікоїд (коли осьовим перерізом є пряма, нахилена під певним

кутом до горизонтальної площини). Всі перераховані задачі розв'язані в циліндричній системі координат. Академік Василенко П.М. вказував на можливість розв'язання подібних задач в системі супровідного тригранника траєкторії частинки (так званої натуральної системи координат). В праці [4] в натуральній системі координат розв'язана задача руху матеріальної частинки по нерозгортній гвинтовій поверхні із горизонтальним розташуванням прямолінійних твірних. Така поверхня в нарисній геометрії носить назву прямого закритого гелікоїда або гвинтового коноїда, а в техніці – шнека. В праці показано, що при вертикальному розташуванні осі коноїда матеріальна частинка при русі по ньому спочатку розганяється, а потім сповільнює рух і зупиняється, тобто така поверхня непридатна для гвинтових спусків.

Мета публікації. В статті розв'язана задача знаходження траєкторій руху матеріальних частинок по поверхні розгортного гелікоїда під дією сили власної ваги за наявності тертя.

Основний зміст. Розглянемо загальний випадок руху матеріальної частинки по гравітаційній поверхні. Припустимо, що точка рухається по певній кривій на поверхні (траєкторії). Проведемо в певній точці траєкторії площину, дотичну до поверхні, яку для наочності покажемо трикутним відсіком з вершинами на осях координат (рис. 1,а). Сама поверхня на рис. 1 (а) не показана, оскільки рух по ній в околі точки на траєкторії можна розглядати як рух по дотичній площині. Проведемо із точки пряму, дотичну до траєкторії, одиничний орт \bar{t} якої направлений в сторону руху (співпадає із вектором швидкості). Перпендикулярно до орта \bar{t} проведемо через точку на траєкторії площину τ , в якій знаходяться наступні вектори: \bar{n} - одиничний орт головної нормалі траєкторії; \bar{N} - нормаль до поверхні; \bar{b} - бінормаль. Орти \bar{t} і \bar{n} взаємно перпендикулярні; разом із третім ортом \bar{b} , який перпендикулярний до перших двох, ці орти утворюють супровідний тригранник Френе траєкторії. Розглянемо діючі на точку сили. Відцентрова сила, яка виникає внаслідок руху точки по криволінійній траєкторії, завжди направлена вздовж головної нормалі \bar{n} в протилежну сторону від центра кривини. Оскільки орт \bar{n} знаходиться в площини τ , то і відцентрова сила mv^2k , де m – маса частинки, v – швидкість її руху і k – кривина траєкторії в даній точці теж буде діяти в даній площині перпендикулярно до траєкторії руху. На рис. 1,б нормальна площина траєкторії τ показана без спотворення, тобто напрям погляду на неї вибраний зі сторони орта \bar{t} ; при цьому орт \bar{t} проєціюється в точку, а дотична площина μ - в пряму лінію. Перетин двох перпендикулярних площин τ і μ дає пряму лінію, вздовж якої направлений орт \bar{P} перпендикулярно до \bar{N} і \bar{t} . Ця ж лінія буде дотичною до кривої q – лінії перерізу поверхні нормальною площиною τ . Три взаємно перпендику-

лярних вектори \overline{tNP} утворюють другий супровідний тригранник траєкторії – тригранник Дарбу. Якщо супровідний тригранник Френе можна побудувати для кривої незалежно від того, знаходиться вона на поверхні чи існує незалежно, то тригранник Дарбу будується тільки для кривої на поверхні, оскільки його орти \bar{t} і \bar{P} знаходяться в площині, дотичній до поверхні в даній точці траєкторії. У названих тригранників орт \bar{t} спільний, а між ортами \bar{N} і \bar{n} та \bar{b} і \bar{P} попарно існує кут ε , який при русі частинки змінюється і залежить від її положення на траєкторії, тобто є функцією довжини дуги траєкторії s . Оскільки рух частинки по поверхні в конкретній точці траєкторії можна розглядати як рух по дотичній площині, то розкладання діючих на частинку сил доцільно здійснювати в триграннику Дарбу, два орти якого - \bar{t} і \bar{P} - утворюють дотичну площину μ . Як відомо із теоретичної механіки, основне рівняння динаміки точки має вигляд $m\bar{a} = \bar{F}$, де m – маса точки, \bar{a} - прискорення яке придає їй рівнодійна прикладених до точки сил \bar{F} . Більшість авторів розглядають наведене рівняння в проекціях на осі нерухомої системи координат $OXYZ$, ми ж будемо розглядати в проекціях на орти супровідного тригранника Дарбу \overline{tNP} . В цьому є певний резон, оскільки при русі точки по гравітаційній поверхні тільки сила ваги mg ($g=9,81 \text{ м/с}^2$) має змінний напрям в натуральній системі координат, решта ж сил строго орієнтована вздовж осей супровідних тригранників.

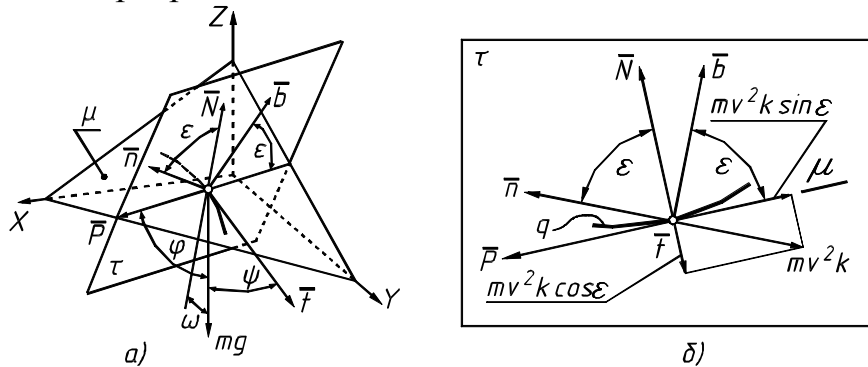


Рис.1. Супровідні тригранники Френе та Дарбу кривої – траєкторії руху частинки по поверхні: а) загальний випадок розташування дотичної площини μ до поверхні в конкретній точці траєкторії; б) дотична площина μ проєціюється в пряму лінію.

Результати досліджень. Запишемо основне рівняння динаміки точки в проекції на орт \bar{t} . Оскільки прискорення є похідною швидкості v по часу t (не путати із ортом \bar{t} . В тексті і надалі зустрічатимуться позначення скалярних і векторних величин одними і тими ж літерами), то можна записати в переході від змінної t до змінної s :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}, \quad \text{тому що} \quad \frac{ds}{dt} = v. \quad (1)$$

Силою, яка спричинює рух частинки і надає їй прискорення, є складова сили ваги, яка в проекції на орт \bar{t} запишеться $mg \cdot \cos \Psi$, де Ψ - кут між ортом \bar{t} і вектором сили ваги mg (рис. 1, а). Іншою силою, направленою вздовж орта \bar{t} протилежно напрямку руху, є сила тертя fG , де f – коефіцієнт тертя, G – тиск, який чинить частинка на поверхню. Враховуючи вищесказане, запишемо

$$mv \frac{dv}{ds} = mg \cos \psi - fG. \quad (2)$$

Сила тиску G направлена вздовж нормалі до поверхні \bar{N} і є сумою двох складових: сили ваги в проекції на орт \bar{N} ($mg \cdot \cos \omega$ - рис. 1,а) і відцентрової сили в проекції на орт \bar{N} ($mv^2 k \cdot \cos \varepsilon$ - рис. 1,б). Слід зазначити, що складова відцентрової сили може як збільшувати тиск на поверхню, так і зменшувати його. Напрямок її дії залежатиме від того, по якій стороні поверхні рухається частинка (пояснимо на прикладі сфери: якщо по внутрішній стороні, то знак "+", якщо по зовнішній, то знак "-"). Отже, вираз для сили тиску приймає вигляд

$$G = mg \cos \omega \pm mv^2 k \cos \varepsilon. \quad (3)$$

Запишемо основне рівняння динаміки точки в проекції на орт \bar{P} . Орт \bar{P} знаходиться в площині τ , перпендикулярній до напрямку руху. Складова відцентрової сили $mv^2 k \cdot \sin \varepsilon$ намагається змістити частинку в поперечному до траєкторії напрямі вгору по кривій поперечного перерізу q (рис.1,б). Частинка зміщається до тих пір, поки не врівноважиться складовою сили ваги $mg \cdot \cos \varphi$ (рис. 1,а). Отже, рівняння руху в проекції на орт \bar{P} запишеться

$$mv^2 k \sin \varepsilon = mg \cos \varphi. \quad (4)$$

Нарешті, рівняння руху частинки в проекції на орт \bar{N} у нас по суті є. Це сила тиску (3), яка врівноважується реакцією поверхні (це рівняння вже входить у рівняння (2), тому система складатиметься із двох рівнянь – в проекціях на орти \bar{t} і \bar{P}). Слід зазначити, що рівність нулю виразу (3) свідчить про те, що в даній точці траєкторії тиск на поверхню відсутній і відбувається відрив частинки від поверхні.

Об'єднаємо рівняння (2) і (4) в систему, зробивши деякі спрощення. По-перше, вирази $k \cos \varepsilon = k_n$ і $k \sin \varepsilon = k_z$ в диференціальній геометрії носять назву відповідно нормальної і геодезичної кривини кривої на поверхні [5]. Ці вирази є проекціями кривини кривої на відповідні орти тригранника Дарбу. По-друге, підстановка виразу (3), який для подальшого застосування беремо із знаком "+", в рівняння (2) дає можливість скоротити його на масу m . Те ж саме стосується рівняння (4). Із врахуванням вищесказаного, остаточно запишемо систему рівнянь (2) і (4)

$$\begin{cases} v \frac{dv}{ds} = g \cos \psi - f(g \cos \omega + v^2 k_t); \\ v^2 k_{\bar{a}} = g \cos \varphi. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) описує рух матеріальної точки по гравітаційній поверхні в загальному випадку, при цьому кути ψ , φ , ω , швидкість v , геодезична k_z та нормальна k_n кривина траєкторії є функціями її дуги s або іншого параметра, який задає криву на поверхні. Якщо поверхня задана параметричними рівняннями $X=X(\alpha, u)$; $Y=Y(\alpha, u)$; $Z=Z(\alpha, u)$, де α і u – незалежні змінні, то розв’язання системи (5) означає знайти таку залежність між змінними α і u , щоб у кожній точці кривої, яка утвориться на поверхні при знайденій залежності, виконувались умови системи (5).

Розглянемо сказане на конкретному прикладі розгортної поверхні. Така поверхня утворюється множиною прямолінійних твірних, дотичних до просторової кривої. За таку криву візьмемо гвинтову лінію $x=R \cos \alpha$; $y=R \sin \alpha$; $z=b \alpha$, де R – радіус циліндра, на якому розташована гвинтова лінія, b – гвинтовий параметр (постійні величини), α – кут повороту точки навколо осі при її русі по гвинтовій лінії (незалежна змінна). В кожній точці гвинтової лінії проходить прямолінійна твірна, напрямним вектором якої є похідні рівнянь лінії, тому рівняння поверхні (в даному випадку розгортного гелікоїда) запишуться

$$X = R \cos \alpha - w R \sin \alpha; Y = R \sin \alpha + w R \cos \alpha; Z = b \alpha + w b, \quad (6)$$

де w – друга незалежна змінна поверхні, пропорційна довжині твірної.

Між параметрами R і b гвинтової лінії існує співвідношення $b=R \cdot \operatorname{tg} \beta$, де β – кут підйому гвинтової лінії і він же буде кутом нахилу прямолінійних твірних до горизонтальної площини. З врахуванням сказаного остання строчка рівнянь (6) запишеться

$$Z = R \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + w R \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (7)$$

Знайдемо коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні (6) із врахуванням (7). Частинні похідні та коефіцієнти G , F , E будуть:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \alpha} = X_{\alpha} &= -R \sin \alpha - w R \cos \alpha; & \frac{\partial X}{\partial w} = X_w &= -R \sin \alpha; \\ \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = Y_{\alpha} &= R \cos \alpha - w R \sin \alpha; & \frac{\partial Y}{\partial w} = Y_w &= R \cos \alpha; \\ \frac{\partial Z}{\partial \alpha} = Z_{\alpha} &= R \cdot \operatorname{tg} \beta; & \frac{\partial Z}{\partial w} = Z_w &= R \cdot \operatorname{tg} \beta. \end{aligned} \quad (8)$$

$$G = X_{\alpha}^2 + Y_{\alpha}^2 + Z_{\alpha}^2 = \frac{R^2}{\cos^2 \beta} + R^2 w^2; \quad F = X_{\alpha} X_w + Y_{\alpha} Y_w + Z_{\alpha} Z_w = \frac{1}{\cos^2 \beta};$$

$$E = X_w^2 + Y_w^2 + Z_w^2 = \frac{1}{\cos^2 \beta}.$$

Сітка координатних ліній поверхні (6) складається із двох сімей: однією сім'єю є прямолінійні твірні, другою – гвинтові лінії. Ця сітка не ортогональна, оскільки середній коефіцієнт F не дорівнює нулю. Для подальшої роботи нам бажано спростити першу квадратичну форму, перейшовши до ортогональної сітки (це єдина можливість спрощення, оскільки крайні коефіцієнти не можуть бути рівними нулю). Тут у нас є дві можливості: залишити одну сім'ю координатних ліній (наприклад, прямолінійні твірні) без змін і відшукати до неї ортогональні траєкторії або ж відшукувати ортогональні траєкторії до сім'ї гвинтових ліній. Ми підемо по першому варіанту з двох причин: по-перше, залишивши сім'ю прямолінійних твірних, ми тим самим спрощуємо другу квадратичну форму, оскільки один із крайніх коефіцієнтів її буде рівний нулю; по-друге, відшукавши ортогональні траєкторії до сім'ї прямолінійних твірних, які є лініями кривини для розгортних поверхонь, ми тим самим одержимо другу сім'ю ліній кривини, що ще більше спростить другу квадратичну форму поверхні, оскільки середній член її в такому випадку буде рівний нулю.

Для відшукування ортогональних траєкторій до сім'ї прямолінійних твірних необхідно розв'язати диференціальне рівняння

$$E dw + F d\alpha = 0. \quad (9)$$

Підставивши в (9) значення відповідних коефіцієнтів із (8), після розв'язання одержимо

$$w = -\alpha + u, \quad (10)$$

де u – постійна інтегрування. Надавши для постійної u конкретне значення і підставивши (10) в (6), ми одержимо лінію, перпендикулярну до прямолінійних твірних розгортного гелікоїда. Оскільки таких значень може бути багато і кожному із них буде відповідати своя лінія, то u приймаємо за нову незалежну змінну замість w . Таким чином, після підстановки (10) в (6) і (7) ми одержимо рівняння розгортного гелікоїда, віднесеного до координатних ліній кривини:

$$\begin{aligned} X &= R \cos \alpha + R \alpha \sin \alpha - uR \sin \alpha; \\ Y &= R \sin \alpha - R \alpha \cos \alpha + uR \cos \alpha; \\ Z &= uR \cdot \operatorname{tg} \beta. \end{aligned} \quad (11)$$

Нарешті, щоб параметр u був не пропорційний довжині прямолінійної твірної, а дорівнював її довжині, потрібно напрямний вектор твірної нормувати, тобто одержати напрямні косинуси. Для цього знаходимо модуль вектора, складовими якого є вирази в рівняннях (11) при змінній u . Добувши квадратний корінь із суми їх квадратів, одержимо: $R/\cos \beta$. Розділивши кожен складову на знайдений вираз, одержимо напрямні косинуси і рівняння (11) приймають остаточний вигляд:

$$\begin{aligned} X &= R \cos \alpha + (R\alpha - u \cos \beta) \sin \alpha; \\ Y &= R \sin \alpha - (R\alpha - u \cos \beta) \cos \alpha; \\ Z &= u \sin \beta. \end{aligned} \tag{12}$$

Для знаходження нормальної кривини лінії на поверхні необхідно мати вирази першої і другої квадратичних форм. Знайдемо перші, другі і змішані частинні похідні рівнянь (12):

$$\begin{aligned} X_\alpha &= (R\alpha - u \cos \beta) \cos \alpha; & X_u &= -\cos \beta \sin \alpha; \\ Y_\alpha &= (R\alpha - u \cos \beta) \sin \alpha; & Y_u &= \cos \beta \cos \alpha; \\ Z_\alpha &= 0; & Z_u &= \sin \beta; \\ X_{\alpha\alpha} &= R \cos \alpha - (R\alpha - u \cos \beta) \sin \alpha; & X_{uu} &= 0; \\ Y_{\alpha\alpha} &= R \sin \alpha + (R\alpha - u \cos \beta) \cos \alpha; & Y_{uu} &= 0; \\ Z_{\alpha\alpha} &= 0; & Z_{uu} &= 0; \\ X_{\alpha u} &= -\cos \beta \cos \alpha; & Y_{\alpha u} &= -\cos \beta \sin \alpha; & Z_{\alpha u} &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Коефіцієнти G, F, E першої квадратичної форми будуть:

$$\begin{aligned} G &= X_\alpha^2 + Y_\alpha^2 + Z_\alpha^2 = (R\alpha - u \cos \beta)^2; \\ F &= X_\alpha X_u + Y_\alpha Y_u + Z_\alpha Z_u = 0; \quad E = X_u^2 + Y_u^2 + Z_u^2 = 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Коефіцієнти N, L, M другої квадратичної форми будуть:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{\sqrt{GE - F^2}} \begin{vmatrix} X_{\alpha\alpha} & Y_{\alpha\alpha} & Z_{\alpha\alpha} \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_\alpha & Y_\alpha & Z_\alpha \end{vmatrix} = \sin \beta \cdot (R\alpha - u \cos \beta); \\ M &= \frac{1}{\sqrt{GE - F^2}} \begin{vmatrix} X_{\alpha u} & Y_{\alpha u} & Z_{\alpha u} \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_\alpha & Y_\alpha & Z_\alpha \end{vmatrix} = 0; \quad L = \frac{1}{\sqrt{GE - F^2}} \begin{vmatrix} X_{uu} & Y_{uu} & Z_{uu} \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_\alpha & Y_\alpha & Z_\alpha \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Знайдемо першу та другу квадратичну форми поверхні (12) та їх відношення – нормальну кривину:

$$I = ds^2 = Edu^2 + 2Fdud\alpha + Gd\alpha^2 = du^2 + (R\alpha - u \cos \beta)^2 d\alpha^2; \tag{16}$$

$$II = Ldu^2 + 2Mdud\alpha + Nd\alpha^2 = \sin \beta \cdot (R\alpha - u \cos \beta) d\alpha^2; \tag{17}$$

$$k_i = \frac{II}{I} = \frac{\sin \beta \cdot (R\alpha - u \cos \beta) d\alpha^2}{du^2 + (R\alpha - u \cos \beta)^2 d\alpha^2}. \tag{18}$$

Для того, щоб на поверхні (12) була задана лінія, необхідно встановити певну залежність між змінними u і α . Будемо вважати змінну u функцією змінної α : $u = u(\alpha)$. Тоді перша квадратична форма (16), яка є лінійним елементом поверхні (диференціалом дуги траєкторії) і нормальна кривина k_n (18) запишуться:

$$\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = u'^2 + (R\alpha - u \cos \beta)^2; \quad k_1 = \frac{\sin \beta \cdot (R\alpha - u \cos \beta)}{u'^2 + (R\alpha - u \cos \beta)^2}, \quad (19)$$

де u' - похідна змінної u по параметру α . Для знаходження геодезичної кривини k_2 необхідно мати перші і другі похідні рівнянь, що задають траєкторію. Вважаючи, що траєкторія руху точки по поверхні задана залежністю $u = u(\alpha)$, знайдемо похідні рівнянь (12):

$$\begin{aligned} x' &= (R\alpha - u \cos \beta) \cos \alpha - u' \cos \beta \sin \alpha; \\ y' &= (R\alpha - u \cos \beta) \sin \alpha + u' \cos \beta \cos \alpha; \\ z' &= u' \sin \beta. \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} x'' &= (R - 2u' \cos \beta) \cos \alpha - (R\alpha - u \cos \beta + u'' \cos \beta) \sin \alpha; \\ y'' &= (R - 2u' \cos \beta) \sin \alpha + (R\alpha - u \cos \beta + u'' \cos \beta) \cos \alpha; \\ z'' &= u'' \sin \beta. \end{aligned}$$

Геодезичну кривину можна знайти, як змішаний добуток трьох векторів: одиничного вектора нормалі до поверхні, одиничного вектора дотичної до кривої і вектора кривини кривої, що можна записати у вигляді визначника [6]

$$k_{\bar{a}} = \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^3 \begin{vmatrix} N_x & N_y & N_z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}. \quad (21)$$

Нормаль до поверхні знайдемо із векторного добутку векторів, дотичних до координатних ліній:

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_\alpha & Y_\alpha & Z_\alpha \\ X_u & Y_u & Z_u \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} N_x &= Y_\alpha Z_u - Y_u Z_\alpha; \\ N_y &= -X_\alpha Z_u + X_u Z_\alpha; \\ N_z &= X_\alpha Y_u - X_u Y_\alpha. \end{aligned} \quad (22)$$

Підставивши в (22) частинні похідні із (13), одержимо координати вектора нормалі до поверхні, який після приведення до одиничного приймає вигляд:

$$N_x = \sin \beta \sin \alpha; \quad N_y = -\sin \beta \cos \alpha; \quad N_z = \cos \beta. \quad (23)$$

Вирази для визначника (21) беремо із (23) і (20); вираз $d\alpha/ds$ знаходимо із (19) як величину, обернену до $ds/d\alpha$:

$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{u'^2 + (R\alpha - u \cos \beta)^2}}$. Після підстановки в (21) і спрощень одержимо

$$k_{\bar{a}} = \frac{u''(R\alpha - u \cos \beta) - u'(R - 2u' \cos \beta) + (R\alpha - u \cos \beta)^2 \cos \beta}{[u'^2 + (R\alpha - u \cos \beta)^2]^{3/2}}. \quad (24)$$

Для підстановки в систему (5) нам залишилося знайти вирази для кутів ψ , φ , ω , кожен із яких утворений напрямом сили ваги mg і одним

із ортів супровідних тригранників. Оскільки напрям дії сили ваги співпадає із віссю OZ , то вказані кути визначаються, як кути між напрямом осі OZ і відповідним ортом: (для ψ - орт \bar{i} ; для φ - орт \bar{P} ; для ω - орт \bar{N}). Вектор сили ваги $\{0, 0, 1\}$ спрямований вниз паралельно осі OZ , при цьому будемо вважати, що сама вісь OZ теж направлена вниз (це відповідає природі руху, оскільки із зростанням параметра α зростає координата Z траєкторії і при цьому частинка рухається вниз). В такому випадку косинус відповідного кута буде напрямним косинусом відповідного орта до осі OZ , тобто проекцією одиничного вектора на вісь OZ . Таким чином, згідно (23)

$$\cos \omega = \cos \beta. \quad (25)$$

З таких же міркувань знайдемо вираз для кута ψ , приймаючи до уваги перші похідні (20), що є координатами вектора, дотичного до траєкторії

$$\cos \psi = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{u' \sin \beta}{\sqrt{u'^2 + (R\alpha - u \cos \beta)^2}}. \quad (26)$$

Нарешті, щоб взяти вираз для кута φ , необхідно знати координати вектора \bar{P} . Оскільки він перпендикулярний двом векторам \bar{N} і \bar{i} , то його координати визначаються із векторного добутку вказаних векторів:

$$\bar{P} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ N_x & N_x & N_x \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}, \quad \text{звідки} \quad \begin{aligned} P_x &= z'N_y - y'N_z; \\ P_y &= -z'N_x + x'N_z; \\ P_z &= y'N_x - x'N_y. \end{aligned} \quad (27)$$

Після підстановки в (27) відповідних виразів із (20) і (23) знайдемо проекції вектора \bar{P} на осі нерухомої системи координат:

$$\begin{aligned} P_x &= -u' \cos \alpha - \cos \beta (R\alpha - u \cos \beta) \sin \alpha; \\ P_y &= -u' \sin \alpha + \cos \beta (R\alpha - u \cos \beta) \cos \alpha; \\ P_z &= \sin \beta (R\alpha - u \cos \beta). \end{aligned} \quad (28)$$

За проекціями вектора \bar{P} (28) знайдемо вираз для косинуса кута φ за формулою

$$\cos \varphi = \frac{P_z}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}} = \frac{\sin \beta (R\alpha - u \cos \beta)}{\sqrt{u'^2 + (R\alpha - u \cos \beta)^2}}. \quad (29)$$

Тепер ми маємо всі вирази, що входять до системи (5), у функції однієї змінної α . Підставляємо в (5) вираз ds із (19), вирази кривин k_n із (19) і k_z із (24) та вирази косинусів кутів із (25), (26) і (29):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{v dv}{\sqrt{u'^2 + (R\alpha - u \cos \beta)^2} d\alpha} &= \frac{g u' \sin \beta}{\sqrt{u'^2 + (R\alpha - u \cos \beta)^2}} - \\ &- f \left[g \cos \beta + \frac{v^2 \sin \beta (R\alpha - u \cos \beta)}{u'^2 + (R\alpha - u \cos \beta)^2} \right]; \\ v^2 \frac{u''(R\alpha - u \cos \beta) - u'(R - 2u' \cos \beta) + (R\alpha - u \cos \beta)^2 \cos \beta}{[u'^2 + (R\alpha - u \cos \beta)^2]^{\frac{3}{2}}} &= \\ &= \frac{g \sin \beta (R\alpha - u \cos \beta)}{\sqrt{u'^2 + (R\alpha - u \cos \beta)^2}}. \end{aligned} \right. \quad (30)$$

Система (30) включає в себе дві невідомі залежності: $u = u(\alpha)$ і $v = v(\alpha)$. Спростуємо її і приводимо до вигляду зручного для інтегрування в середовищі *MatLab* за допомогою пакета моделювання динамічних систем *Simulink*:

$$\left\{ \begin{aligned} v' &= \frac{g}{v} u' \sin \beta - f \left[\frac{g}{v} \cos \beta \sqrt{u'^2 + (R\alpha - u \cos \beta)^2} + \frac{v \sin \beta (R\alpha - u \cos \beta)}{\sqrt{u'^2 + (R\alpha - u \cos \beta)^2}} \right]; \\ u'' &= \frac{g}{v^2} \sin \beta [u'^2 + (R\alpha - u \cos \beta)^2] + u' \frac{R - 2u' \cos \beta}{R\alpha - u \cos \beta} - (R\alpha - u \cos \beta) \cos \beta. \end{aligned} \right. \quad (31)$$

Інтегрування подібної системи показано в праці (4) за допомогою відповідної моделі. До її складу входять три інтегратори, кожному із котрих потрібно задавати постійну інтегрування. Три постійних інтегрування задають початкові умови, за яких починається рух частинки, а саме: u_0 задає положення частинки на поверхні в початковий момент руху (відстань u вздовж прямолінійної твірної); v_0 – початкова швидкість; u'_0 – напрям руху в початковий момент, який задається в системі криволінійних координат поверхні. Однак числове значення u'_0 не дає уявлення про напрям руху, тому необхідно перейти до кута γ , який утворює вектор швидкості із однією із координатних ліній поверхні, наприклад, із прямолінійною твірною. Оскільки сітка координатних ліній на поверхні ортогональна, то елемент дуги траєкторії ds можна розглядати як гіпотенузу елементарного прямокутного трикутника (рис. 2), катетами якого є елементи довжин координатних ліній. Це можна зрозуміти із виразу (16), якщо його трактувати як теорему Піфагора. Із прямокутного трикутника (рис. 2) маємо:

$$\text{ctg} \gamma = \frac{du}{(R\alpha - u \cos \beta) d\alpha} \quad \text{або} \quad u' = \text{ctg} \gamma (R\alpha - u \cos \beta). \quad (32)$$

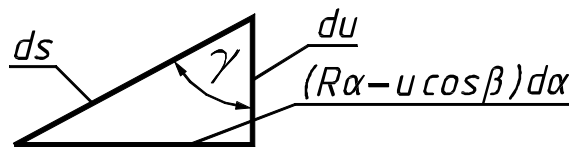


Рис. 2. До визначення кута γ між напрямом руху частинки і прямолінійною твірною поверхні.

Задавши координати точки на поверхні ($u = u_0$ і $\alpha = \alpha_0$), а також величину потрібного кута γ , із виразу (32) знаходимо $u' = u'_0$.

За результатами інтегрування системи (31) в середовищі *MatLab* побудовано траєкторії руху матеріальної частинки за різних початкових умов на поверхні розгортного гелікоїда. Поверхня гелікоїда побудована за рівняннями (6), (7) при $R = 10$ м, $\beta = 30^\circ$. На рис. 3, а показані траєкторії руху матеріальної частинки з коефіцієнтом тертя $f = 0,3$, яка починає свій рух з однієї і тієї ж точки і з однаковою початковою швидкістю ($\alpha_0 = 0$, $u_0 = 20$ м, $v_0 = 15$ м/с), але в різних напрямках. На рис. 3, б показано графіки зміни швидкості, що відповідають цим траєкторіям. На рис. 4 показані траєкторії і відповідні їм графіки зміни швидкостей при тому ж коефіцієнті тертя $f = 0,3$, але при різних початкових умовах. У всіх випадках частинка починає свій рух під кутом $\gamma = 45^\circ$ до прямолінійної твірної, проте з різних точок і з різними початковими швидкостями.

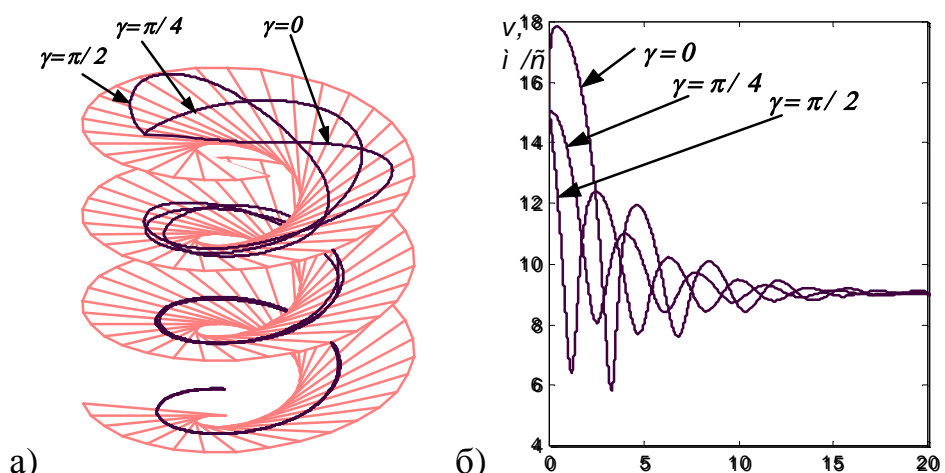


Рис. 3. Траєкторії руху матеріальної частинки і відповідні графіки швидкостей при однакових початкових умовах ($\alpha_0 = 0$, $u_0 = 20$ м, $v_0 = 15$ м/с, $f = 0,3$) і різних напрямках на початок руху.

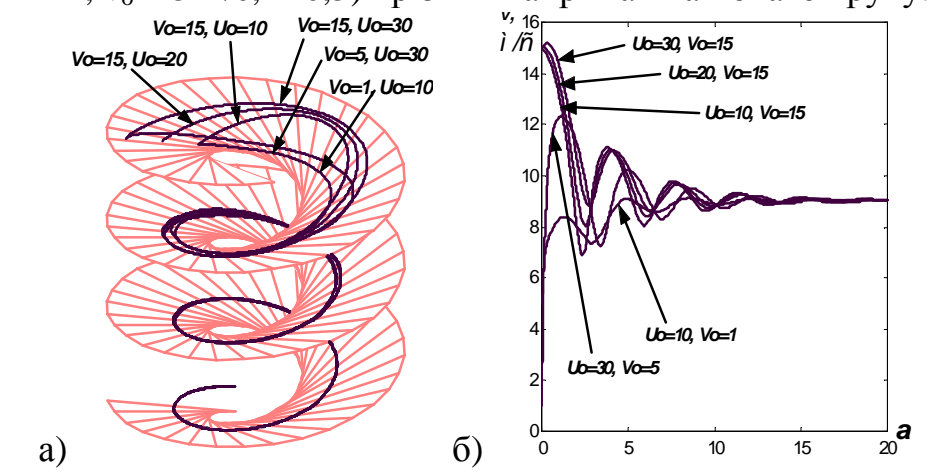


Рис. 4. Траєкторії і відповідні графіки швидкостей для матеріальної частинки, що починає свій рух із різних точок на поверхні і з різними початковими швидкостями.

Розглянемо траєкторії руху і відповідні графіки швидкостей для матеріальних частинок, які мають різні коефіцієнти тертя і вступають на поверхню із початковими швидкостями близькими до нуля. Напряму вступу на поверхню при цьому практично не має значення, оскільки частинка починає рухатися під дією власної ваги по лінії найбільшого нахилу (вздовж прямолінійної твірної поверхні). Такий рух має місце при сепарації матеріалів з різними коефіцієнтами тертя. На рис. 5, а показано траєкторії руху частинок із різними коефіцієнтами тертя, які вступають на поверхню в одній і тій же точці (при $\alpha=0$, $u_0=30$), а на рис. 5, б – графіки зміни швидкостей. На відміну від попередніх графіків, на яких швидкість показана в залежності від кута повороту α , на рис. 5, б швидкість є функцією довжини дуги траєкторії, що є більш природнім. Зокрема, з цих графіків видно, що частинки з різними коефіцієнтами тертя проходять шлях різної довжини при однаковому числі обертів навколо осі гелікоїда.

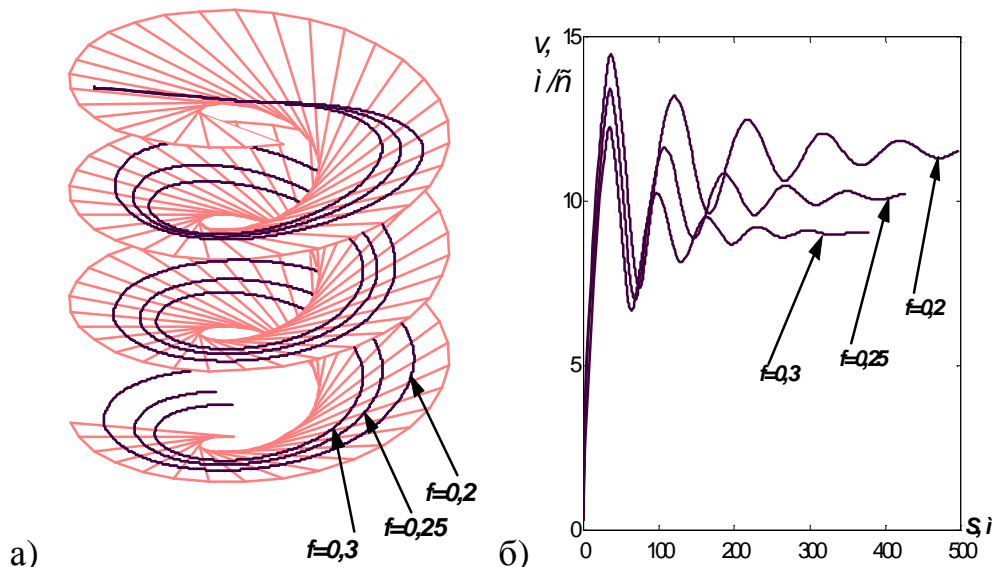


Рис. 5. Траєкторії і відповідні графіки швидкостей для частинок з різними коефіцієнтами тертя.

Із рисунків 3,а, 4,а видно, що матеріальні частинки із однаковим коефіцієнтом тертя з часом виходять на одну і ту ж траєкторію незалежно від початкових умов руху, а їхні швидкості стабілізуються і наближаються до сталої величини ($v=9$ м/с згідно графіків на рис. 3,б і 4,б). Отже, можна зробити висновок, що з часом частинка буде рухатися з постійною швидкістю по гвинтовій лінії поверхні, тобто на певній відстані ρ від осі гелікоїда. Відстань ρ від осі гелікоїда до точки на траєкторії можна знайти на горизонтальній проекції за теоремою Піфагора

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{R^2 + (R\alpha - u \cos \beta)^2}, \quad (33)$$

де вирази для X і Y взято із рівнянь (12). Розв'язавши (33) відносно u , знайдемо вираз $u=u(\alpha)$ та його похідні:

$$u = \frac{R\alpha - \sqrt{\rho^2 - R^2}}{\cos \beta}; \quad u' = \frac{R}{\cos \beta}; \quad u'' = 0. \quad (34)$$

Підставивши вирази (34), а також $v'=0$ в систему (31), після спрощень одержимо:

$$\begin{cases} 0 = \frac{g}{v} R \cdot \operatorname{tg} \beta - f \left[\frac{g}{v} \cos \beta \sqrt{R^2 \operatorname{tg}^2 \beta + \rho^2} + \frac{v \sin \beta \sqrt{\rho^2 - R^2}}{\sqrt{R^2 \operatorname{tg}^2 \beta + \rho^2}} \right]; \\ 0 = \frac{g}{v^2} \sin \beta (R^2 \operatorname{tg}^2 \beta + \rho^2) - \frac{R^2}{\sqrt{\rho^2 - R^2} \cos \beta} - \sqrt{\rho^2 - R^2} \cos \beta. \end{cases} \quad (35)$$

Вважаючи параметри гелікоїда R і β заданими, а коефіцієнт тертя f відомим, приходимо до висновку, що система (35) містить дві невідомі величини: ρ і v . Розв'язавши систему (35) знайдемо ці величини:

$$\rho^2 = \frac{R^2 \sin^2 \beta \left(\cos \beta + \sqrt{4f^2 + \cos^2 \beta} \right)}{2f^2 \cos \beta}; \quad (36)$$

$$v^2 = R \frac{g}{f} \operatorname{tg} \beta \sqrt{\frac{\cos \beta (\sin^2 \beta - 2f^2) + \sin^2 \beta \sqrt{4f^2 + \cos^2 \beta}}{2 \cos \beta}}. \quad (37)$$

Таким чином, вирази (36), (37) дають можливість розрахувати швидкість частинки із заданим коефіцієнтом тертя та траєкторію її руху по розгортному гелікоїду із відомими конструктивними параметрами після того, як рух стабілізувався. Розрахуємо ρ і v для гелікоїда із конструктивними параметрами $R=10$ м, $\beta=30^\circ$ і відомому коефіцієнту тертя $f=0,3$. Підстановка названих величин в (36) і (37) дає: $\rho=17,55$ м; $v=9,03$ м/с. Ми одержали підтвердження того, що інтегрування системи (31) чисельними методами здійснено правильно, оскільки із графіків швидкостей (рис. 3,б і 4,б) видно, що по мірі руху швидкість частинки стабілізується і наближається до позначки 9 м/с.

Задачу руху матеріальної частинки по розгортному гелікоїду в циліндричній системі розв'язав М.І. Сисоєв [3] і дав певні залежності, щоправда не в такому закінченому вигляді, як вирази (36) і (37). Однак можна показати, що одержані ним залежності підтверджують результати (36) і (37). Зокрема, на стор. 8 формула (48) дає залежність між коефіцієнтом тертя і кутами α і β , яка згідно наших позначень запишеться:

$$f = \cos \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}, \quad \text{де} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{R \operatorname{tg} \beta}{\rho}. \quad (38)$$

Кут β відповідає аналогічному куту в наших викладках, а через α позначено кут підйому гвинтової лінії, по якій рухається частинка. Якщо значення виразу тангенса цього кута (в (38) справа) підставити у лівий вираз, одержимо

$$f = \frac{R \sin \beta}{\rho^2} \sqrt{R^2 \operatorname{tg}^2 \beta + \rho^2}. \quad (39)$$

Розв'язавши (39) відносно ρ^2 , одержимо відому формулу, наведену в (36). Наведемо ще одну залежність (47) із [3, стор. 8]

$$v^2 = g\rho \cdot \operatorname{tg}\beta \sqrt{1 - i^2}, \quad \text{де} \quad i = \frac{R}{\rho}. \quad (40)$$

Підставивши в (40) вираз для ρ із (36), після спрощення матимемо формулу для розрахунку швидкості, яка точно збігається із одержаною нами відповідною формулою (37).

Висновки. В статті розв'язана задача знаходження траєкторій руху матеріальних частинок по поверхні розгортного гелікоїда під дією сили власної ваги за наявності тертя. Результати розв'язку диференціальних рівнянь, одержані авторами при використанні натуральної системи координат, повністю збігаються із аналогічними результатами інших авторів, котрі використовували циліндричну систему координат. Сучасний рівень програмних продуктів дав можливість зробити візуалізацію розрахунків, тобто показати на наочних зображеннях поверхні траєкторії руху частинки за різних початкових умов. Такий підхід відкриває нові можливості в дослідженні кінематичних параметрів руху частинок і одержанні іншої додаткової інформації.

Література.

1. *Василенко П.М.* Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин/ *П.М. Василенко.* -К.: УАСХН, 1960. - 283 с.
2. *Заика П.М.* Избранные задачи земледельческой механики/ *П.М. Заика.* – К.: Изд-во УСХА, 1992. – 507 с.
3. *Сысоев Н.И.* Теоретические основы и расчет сортировки “Змейка”/ *Н.И. Сысоев* // Сельхозмашина - 1949. - № 8 - С. 5 – 8.
4. *Войтюк Д.Г.* Знаходження траєкторії руху матеріальної частинки по гравітаційних лінійчатих поверхнях із горизонтальними твірними/ *Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака* // Збірник наукових праць НАУ “Механізація сільськогосподарського виробництва”. – К.: НАУ, 2002. – Т.12.– С. 58-69.
5. *Выгодский М.Я.* Дифференциальная геометрия/ *М.Я. Выгодский.* - М.: ГИТТЛ, 1949. - 512 с.
6. *Гячев Л.В.* Теория лемешно-отвальной поверхности/ *Л.В. Гячев.* – Зерноград, 1961. – 317 с.

УТОЧНЕННАЯ ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПО ГРАВИТАЦИОННЫМ ПОВЕРХНОСТЯМ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ МАШИН

Булгаков В.М., Калетник Г.Н., Кравченко И.Е., Пилипака С.Ф.

Аннотация - выведены дифференциальные уравнения движения материальной точки по развертывающемуся геликоиду под действием силы собственного веса. По результатам решения уравнений построены траектории на поверхности геликоида для разных начальных условий. Найденны траектории для постоянной скорости движения материальной точки.

REFINED THEORY OF MOTION MATERIAL POINT ON BY GRAVITATIONAL SURFACES AGRICULTURAL MACHINES

B. Bulgakov, G. Kaletnik, I. Kravchenko, S. Pilipaka

Summary

The differential equations of mass point motion on fold helicoids-down under operation of force of own weight are obtained. The trajectory on a surface of a helicoid for different initial conditions are constructed by the results of the solution of equations. The trajectory for constant speed of motion of a mass point are found.